

第三版序言

当 A. Я. 辛欽 (Хинчин) 的这本书由苏联国家数学物理书籍出版社刊印第三版时, 作者已經逝世了。因此, 本版除去增添了一些关于文献的注解之外, 没有作任何修改。

虽然辛欽写此书已是二十五年以前的事了, 但它仍使人讀来新穎有味。难怪在最近十年中, 它被許多国家翻譯再版了很多次。并且, 由于計算技术新工具的发展, 自然地引起了对各种計算算法, 其中也包括連分数算法的注意。在这方面, 几年前曾出现了 A. H. 霍萬斯基 (Хованский) 的一本有实用意义的专著 (“連分式及其推广在近似分析問題上的应用, Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа”, 苏联国家技术书籍出版社, 1956 年^①)。虽然辛欽并没有提出类似的目的, 可是他的书对于連分数算法的研究, 对于数的度量理論这一深入而有趣的问题, 都可以作为一个很好的引論。作者在后一問題的发展上贡献了很大的力量。第三章的大部分是他的研究成果。

我希望所推荐的这本书将有象二十五年前那样多的广大讀者津津有味地来閱讀, 而本人也就是二十五年前的讀者行列中的一員。

Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко)

① 此书有中譯本, 叶乃寧譯, 科学出版社, 1962 年。——譯者注

第二版序言

本书第二版与第一版相比，没有重要的修改。

从本书出第一版之时起，关于连分数的其他俄文专著还未出现。在包含连分数初步知识的一般数论教本中，可以推荐 Л. А. 格拉维(Граве)，Б. А. 温科夫(Венков)及 Н. В. 阿诺尔德(Арнольд)的书。

1949年10月 A. 季敏

第一版序言摘要

连分数理论(或者更常见地称之为连级分数理论)研究一种特殊的算法，它是数学分析、概率论、力学、特别是数论中的重要工具之一。这本初等入门性读物的目的仅在于向读者介绍形如

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

的所谓最简连分数，而且主要是一切“元素” $a_i (i \geq 1)$ 为正整数的连分数。这个最重要的同时也是研究得最多的连分数类，是连分数理论的极大部分算术应用与很多分析应用的基础。

我认为出版关于连分数理论的专题性初等著作是必要的，因为这一理论过去是中学数学教学大纲中的一部分，现在却被删去了，因此没有被写入新的初等代数教本里；另一方面，高等学校(甚至综合大学的数学系)教学大纲中也没有规定讲授这种理论，因此

高等学校的相应的新教本中自然也没有谈到连分数。于是，有必要掌握这一初等工具的专家们就不得不寻找革命前的教科书或国外的专著了。

因此，本书的基本目的在于填补我们教科书中的这一空白，因而它必须是初等的和尽可能通俗的书：这在很大程度上预先决定了本书的体例。但是，为了适应各种应用的需要，它的内容有些已超出了最低限度的范围。特别是最后一章包含着连分数的度量理论（或概率论）的基础，这是重要的新篇章；其次，在第二章内许多地方，我试图在不超出初等范围条件下，尽可能地着重指出连分数这一工具在研究无理数的算术性质时的基本作用。我认为，既然出版连分数理论基础的单行本，不提到这些最富于现代科学意义的部分是可惜的事。

至于谈到材料的安排，这里必须说明的只是在第一章先叙述了理论的形式部分（这里说的基本上都是元素为正数——不一定是整数——的连分数，或常常更广泛的是元素为简单独立变量的连分数）。我们先将所研究对象的形式方面的性质告诉读者，再讲到它的内容，这样做是有缺陷的——它使形式与内容相脱离，——这从教育学的角度来看也是不好的。

但是，不言自明，这样作能够达到方法学上更大的明确性（因为读者可以直接看出，连分数的哪些性质依赖于本身的构造，哪些性质是元素为正整数的连分数所特有的）。提前叙述形式部分可使算术理论（它是全部理论的实际对象）的进一步发展建立在已经准备好了的公式的基础上，因此可以把读者的全部注意力集中于所叙述材料的内容方面去，不再被纯粹的公式推导分散了精力。

目 录

第三版序言

第二版序言

第一版序言摘要

| | |
|---|----|
| 第一章 工具的性质 | 1 |
| § 1 引言 | 1 |
| § 2 渐近分数 | 3 |
| § 3 无限连分数 | 7 |
| § 4 以自然数为元素的连分数 | 11 |
| 第二章 用连分数表示数 | 16 |
| § 5 连分数是表示实数的工具 | 16 |
| § 6 渐近分数作为最佳逼近 | 20 |
| § 7 逼近的阶 | 29 |
| § 8 逼近的一般法则 | 34 |
| § 9 代数无理数的逼近法, 柳维尔(Liouville)超越数 | 46 |
| § 10 二次无理数和循环连分数 | 48 |
| 第三章 连分数的度量理论 | 52 |
| § 11 引言 | 52 |
| § 12 将连分数的元素作为它所表示的数的函数 | 53 |
| § 13 元素增长的度量性估计 | 61 |
| § 14 渐近分数分母增长的度量性估计, 逼近的度量理论的基本定理 | 66 |
| § 15 高斯(Gauss)问题和库兹明(Кузьмин)定理 | 72 |
| § 16 平均值 | 86 |

第一章 工具的性质

§1 引言

如下的表达式称为最简连分数:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (1)$$

字母 a_0, a_1, a_2, \dots 在最一般的情形下理解为独立变量; 根据不同的需要这些变量可以在不同的域中取值. 例如, 可以认为 a_0, a_1, a_2, \dots 是实数或复数, 一个或多个变量的函数, 等等. 按照本书的目的, 我们假定 a_1, a_2, \dots 都是正数; a_0 为任意实数. 我们称这些数为给定的连分数的元素. 元素的个数可为有限或无限. 在第一种情况下, 我们可将此连分数表为如下形式

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \quad (2)$$

并且称之为有限连分数或更确切地称之为 n 项连分数(所以 n 项连分数有 $n+1$ 个元素); 在第二种情况下, 我们将连分数表为(1)的形状, 并称之为无限连分数.

每个有限连分数都是对其元素进行有限次有理运算的结果; 因此按照我们对其元素所作的假设, 任何有限连分数都表示某个实数; 特别是若此连分数的元素皆为有理数, 则此连分数本身也是有理数.

反之, 我们不能直接认为无限连分数代表某个数值. 至少, 在

获得进一步的结论之前,它只是一种形式上的记号,就象无穷级数,在它的收敛性问题还未提出时,也只是一种形式上的记号,但是,它应当是数学研究的对象。

为了方便起见,我们约定,今后将无限连分数(1)写成如下形式

$$[a_0; a_1, a_2, \dots], \quad (3)$$

又把有限连分数(2)写成

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]; \quad (4)$$

这样,有限连分数的项数就等于位于分号后的记号(指元素)的个数。

我们约定,把连分数

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$$

称为连分数(4)的节,在此, $0 \leq k \leq n$; 同样地,当 $k \geq 0$ 时,我们称 s_k 为无限连分数(3)的节。显然,任何(有限或无限)连分数的节都是有有限连分数。

其次,我们约定,把连分数

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, \dots, a_n]$$

称为(有限)连分数(4)的余式;类似地把连分数

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$$

称为(无限)连分数(3)的余式。显然,有限连分数的一切余式也是有限连分数,无限连分数的一切余式都是无限连分数。

对于有限连分数,按其定义推出关系式

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, r_k] \quad (5)$$

$$(0 \leq k \leq n).$$

对于无限连分数,类似的关系式

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, r_k] \quad (k \geq 0)$$

只有形式的意义,因为等式右端的元素 r_k 是无限连分数,它现在还不是任何确定的数值。

§2 漸近分数

每一个有限連分数

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

都是对其元素进行有限次有理运算的结果, 所以是其元素的有理函数, 因而可表为关于 a_0, a_1, \dots, a_n 的两个整系数多项式之商

$$\frac{P'(a_0, a_1, \dots, a_n)}{Q'(a_0, a_1, \dots, a_n)}.$$

如果这些元素取定了数值, 则此連分数可表为普通分数 $\frac{p}{q}$ 之形, 但此表示法自然不是唯一的. 对于我们以后来说, 重要的是它的某个确定的简单分式表示式——我們称之为标准式. 此表示式我們用归纳法确定之.

我們采用分数 $\frac{a_0}{1}$ 作为零項連分数 $[a_0] = a_0$ 的标准式. 現在假定对于項数小于 n 的連分数都已确定了其标准式, 按照(5)式我們可将 n 項連分数 $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ 写为

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1};$$

这里 $r_1 = [a_1; a_2, \dots, a_n]$ 是 $n-1$ 項連分数, 所以它的标准式已經确定; 設它可表为

$$r_1 = \frac{p'}{q'},$$

这时

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{q'}{p'} = \frac{a_0 p' + q'}{p'};$$

我們用此分数作为連分数 $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ 的标准式; 这样, 設

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = \frac{p}{q},$$

$$r_1 = [a_1; a_2, \dots, a_n] = \frac{p'}{q'},$$

則对于这些标准式的分子与分母有关系式:

$$p = a_0 p' + q', \quad q = p'. \quad (6)$$

同时我們看出, 对于項数为任意的有限連分数, 我們已唯一地确定了它的标准式.

在連分数理論中, 連分数 (有限或无限) $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ 的节的标准式起着特別重要的作用; 节

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$$

的标准式我們用 $\frac{p_k}{q_k}$ 来表示, 并称之为連分数 α 的 k 阶漸近分数. 此概念对于有限或无限的連分数 α 都是以同一方式确定的; 不同之点仅仅在于, 有限連分数只有有限个漸近分数, 而无限連分数的漸近分数形成无穷集合. 对于 n 項連分数 α , 显然,

$$\frac{p_n}{q_n} = \alpha;$$

这样的連分数共有 $n+1$ 个漸近分数 (阶数为 $0, 1, 2, \dots, n$).

定理 1 (漸近分数的构成規律) 对于任何 $k \geq 2$

$$\left. \begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

証明 当 $k=2$ 时, (7) 式容易直接驗證. 假設, 当 $k < n$ 时 (7) 式都成立; 观察連分数

$$[a_1; a_2, \dots, a_n]$$

并且用 $\frac{p'_r}{q'_r}$ 表示它的 r 阶漸近分数; 根据 (6) 式

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1},$$

$$q_n = p'_{n-1},$$

又因为按照我們的假設

$$p'_{n-1} = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3},$$

$$q'_{n-1} = a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}$$

(这里写的是 a_n 而不是 a_{n-1} , 因为連分数 $[a_1; a_2, \dots, a_n]$ 从 a_1 开

始,而不是从 a_0 开始),所以根据(6)式

$$\begin{aligned} p_n &= a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}) \\ &= a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3}) \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

定理由此得証.

我們所建立的逆推公式(7),它以元素 a_n 及前两个漸近分数的分子与分母来表示 n 阶漸近分数的分子与分母,乃是連分數全部理論中的基本公式.

附注 在研究中引入 -1 阶漸近分數并且設 $p_{-1}=1, q_{-1}=0$ 有时是方便的.显然,在此約定(而且仅仅在此約定)之下,(7)式当 $k=1$ 时保持有效.

定理 2 对于一切 $k \geq 0$

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \quad (8)$$

証明 将(7)式中两式分別乘以 q_{k-1} 及 p_{k-1} , 然后由第二式减去第一式,我們得到:

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}),$$

又因为

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1,$$

所以定理得証.

推論 对于一切 $k \geq 1$

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}. \quad (9)$$

定理 3 对于一切 $k \geq 1$

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

証明 将(7)式中的两式分別乘以 q_{k-2} 与 p_{k-2} , 然后从第二式减去第一式,我們据定理 2 得到:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k,$$

定理由此得証。

推論 对于一切 $k \geq 2$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}. \quad (10)$$

已經得到的这一系列简单的結果，使我們很容易作出关于連分数的漸近分数之間相互关系的最重要結論。事实上，等式(10)指出，偶数阶漸近分数形成递增序列，而奇数阶漸近分数形成递减序列，所以此二序列彼此相向靠近（当然这些結論是在从 a_1 起所有元素为正数的前提下作出的）。因为据(9)式，每一个奇数阶分数都大于紧接着它的那个偶数阶分数，所以显然，任何奇数阶漸近分数必大于任何偶数阶漸近分数，从而我們得到下列結論：

定理 4 偶数阶漸近分数是递增序列，而奇数阶漸近分数是递减序列。同时任何奇数阶漸近分数大于任何偶数阶漸近分数。

显然，就特例而言，对于有限連分数 α ，其所有偶数阶漸近分数都小于 α ，其所有奇数阶漸近分数都大于 α （当然，最后一个等于 α 的漸近分数是例外）。

在結束本节时，我們来証明关于漸近分数的分子与分母的两个简单而又重要的性质。

定理 5 对于任何 $k (1 \leq k \leq n)$

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_k r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}} \quad (11)$$

（这里的 p_i, q_i, r_i 皆属于等式左端的連分数）。

証明 据(5)式

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0].$$

这等式右端的連分数显然有 $k-1$ 阶漸近分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ ；其 k 阶漸近分数 $\frac{p_k}{q_k}$ 就是它自己，又按(7)式可得

$$p_k = p_{k-1} r_k + p_{k-2}, \quad q_k = q_{k-1} r_k + q_{k-2},$$

所以定理得到証明。

定理 6 对于任何 $k \geq 1$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1].$$

证明 当 $k=1$ 时此关系式显然成立, 因为它就是

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1;$$

设 $k > 1$, 且设已证明

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, \dots, a_1]; \quad (12)$$

据(7)式

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

故我们有:

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \left[a_k; \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} \right],$$

因此, 按照(5)式及(12)式

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1],$$

定理由此得到证明.

§3 无限连分数

每一个无限连分数

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] \quad (13)$$

都对应着一个渐近分数的无穷序列

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_k}{q_k}, \dots \quad (14)$$

每个渐近分数都是某个实数; 当序列(14)收敛, 即它具有唯一确定的极限 α 时, 很自然地可认为此数 α 是连分数(13)之“值”并写成

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

连分数(13)在这时称为收敛的; 如果序列(14)无确定的极限,

則我們称連分數(13)是發散的。

收斂的無限連分數有許多类似于有限連分數的性质。下面的命題使我們能充分地引伸这些类似性，因而它是一条基本性质。

定理 7 設無限連分數(13)收斂，則其所有余式皆收斂；反之，設連分數(13)的某一個余式收斂，則此連分數收斂。

証明 我們約定以 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示連分數(13)的漸近分數，又以 $\frac{p'_k}{q'_k}$ 表示它的任何余式(例如 r_n)的漸近分數。

根据(11)式，显然有

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n+k}] = \frac{p_{n-1} \frac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1} \frac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}} \quad (k=0, 1, \dots). \quad (15)$$

由此直接得到，若余項 r_n 收斂，即分數 $\frac{p'_k}{q'_k}$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时趋于某极限，这个极限我們也用 r_n 表示，則分數 $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ 此时也趋于极限 α ，

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}; \quad (16)$$

从关系式(15)中解出 $\frac{p'_k}{q'_k}$ ，我們可用完全相同方式証明逆命題的正确性，这样就完成了定理 7 的証明。

注意，我們对于收斂的無限連分數所建立的(16)式，完全类似于以前对于有限連分數所証得的(11)式，因而定理 5 对于收斂的無限連分數也成立①。

从上节定理 4 显然可得关于收斂的無限連分數的下述命題。

定理 8 收斂無限連分數的值大于其任何偶数阶漸近分數而小于其任何奇数阶漸近分數。

其次，上节定理 2 的推論引导我們从定理 8 得出下列結果，它

① 只須將定理 5 中的 r_k 理解为無限連分數的値。——譯者注

在連分数的算術理論中起基本作用。

定理 9 对任何 $k \geq 0$, 收敛无限連分数 (13) 的值 α 满足不等式①

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

显然, 当 $k < n$, 定理 9 对于有限連分数

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

也成立, 并且仅仅在 $k = n-1$ 时不等式变为等式, 因为 $\alpha = \frac{p_n}{q_n}$.

若 α 为收敛无限連分数 (13) 的值, 則以下我們也将此連分数的元素称为数 α 的元素; 同样地, 我們把連分数 (13) 的漸近分数, 节及余式称为数 α 的漸近分数, 节及余式. 按照定理 7, 收敛无限連分数 (13) 的一切余式具有确定的实数值.

类似于无穷級数, 对于无限連分数自然会提出关于其收敛性的判別法問題; 在我們所考虑的情形中 (即当 $i \geq 1$, 有 $a_i > 0$) 能够提出非常簡便的收敛性判別法.

定理 10 連分数 (13) 收敛的必要且充分条件是級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (17)$$

为发散.

証明 显然, 据定理 4, 无限連分数收敛的必要且充分条件为此定理所指出的两个序列具有同一极限 (当然, 据定理 4, 在一切情况下, 此二序列都有极限). 而 (9) 式指出, 这种情形当且仅当

$$q_k q_{k+1} \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) \quad (18)$$

时才会发生.

这样, 条件 (18) 即所給連分数收敛的必要充分条件.

假設級数 (17) 收敛; 据 (7) 式中第二式

① 我們指出, 按照我們的假設, 对一切 $k \geq 0$, 都有 $q_k > 0$, 因为 $q_0 = 1, q_1 = a_1$, 又我們借助于归納法并按照 (7) 式之第二式可得 $q_k > 0$ 对于一切 $k \geq 1$ 都成立. — 半欽注

$$q_k > q_{k-2} \quad (k \geq 1),$$

因此对于任何 k , $q_k > q_{k-1}$ 及 $q_{k-1} > q_{k-2}$ 二式中至少有一式成立. 在第一种情况下, (7) 式之第二式指出

$$q_k < a_k q_k + q_{k-2},$$

因此对于充分大的 k (据级数 (17) 的收敛性, 当 $k > k_0$ 有 $a_k < 1$) 有

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1-a_k};$$

在第二种情况下, 当 $a_k < 1$ 上一公式指出

$$q_k < (1+a_k)q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1-a_k};$$

这样, 对于一切 $k \geq k_0$ 我们有

$$q_k < \frac{1}{1-a_k} q_l,$$

这里 $l < k$; 如果 $l \geq k_0$, 则可对 q_l 再用此不等式; 继续这些讨论, 显然, 我们得到不等式:

$$q_k < \frac{q_s}{(1-a_k)(1-a_l)\cdots(1-a_r)}, \quad (19)$$

这里 $k > l > \cdots > r \geq k_0$ 而 $s < k_0$. 但由于级数 (17) 收敛, 所以无穷乘积

$$\prod_{n=k_0}^{\infty} (1-a_n)$$

收敛, 也就是说此乘积具有正数值, 我们记之为 λ . 显然

$$(1-a_k)(1-a_l)\cdots(1-a_r) \geq \prod_{n=k_0}^{\infty} (1-a_n) = \lambda;$$

因此, 若记 $q_0, q_1, \dots, q_{k_0-1}$ 中的最大值为 Q , 我们可以从不等式 (19) 断定

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \quad (k \geq k_0),$$

因此,

$$q_k q_{k+1} < \frac{Q^2}{\lambda^2} \quad (k \geq k_0),$$

所以关系式(18)不成立,故連分数为发散.

現在設級数(17)发散. 因为对一切 $k \geq 2$ 有 $q_k > q_{k-2}$, 以 c 表示 q_0, q_1 中的最小数, 則对任何 $k \geq 0$ 有 $q_k \geq c$; 因而(7)式之第二式給出

$$q_k \geq q_{k-2} + ca_k \quad (k \geq 2).$$

逐次地应用此不等式, 得到

$$q_{2k} \geq q_0 + c \sum_{n=1}^k a_{2n}$$

和

$$q_{2k+1} \geq q_1 + c \sum_{n=1}^k a_{2n+1},$$

因此

$$q_{2k} + q_{2k+1} \geq q_0 + q_1 + c \sum_{n=1}^{2k+1} a_n;$$

換句話說, 对一切 k ①

$$q_k + q_{k-1} > c \sum_{n=1}^k a_n.$$

以上我們証明了此不等式当 k 为奇数时成立, 但是显然用同样方式可証明当 k 为偶数时它也成立.

由此可見, 在乘积 $q_k q_{k-1}$ 中至少有一个因子大于 $\frac{c}{2} \sum_{n=1}^k a_n$, 而另一个因子在任何情况下都不会小于 c . 所以我們得到

$$q_k q_{k-1} > \frac{c^2}{2} \sum_{n=1}^k a_n;$$

根据級数(17)为发散这一假设, 得到关系式(18), 因此所給的連分数为收敛. 这就完全証明了定理 10.

§4 以自然数为元素的連分数

从本节起直到书末, 我們將假定所給連分数的元素 a_1, a_2, \dots 都是自然数, 即正整数. 至于 a_0 , 也是整数, 但不一定是正整数.

如果这样的連分数是无限連分数, 則按照定理 10 可知它一定

① 在此設 k 为奇数, 且 $k \geq 1$. ——譯者注

收敛。因此，今后我们可以无条件地认为一切无限连分数皆收敛，并且可以谈论它们的“值”或“量”。

如果这样的连分数是有限的，且其最后一元素 $a_n=1$ ，则显然有 $r_{n-1}=a_{n-1}+1$ 为整数；这时，我们可以将此 n 项连分数 $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1]$ 写成 $n-1$ 项连分数 $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}+1]$ ，而且在此新形式下最后一元素显然大于 1。

由于这一注解，我们在以后可以不考虑最后一元素是 1 的有限连分数（当然，零项连分数^①是例外）。这一注解在数的连分数表示式的唯一性问题中起着重要的作用（参看第二章 § 5）。

显然，在我们所研究的情形中，渐近分数的分子和分母都是整数[对于 p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0 这一点可直接看出，对于其余的数可以从 (7) 式得到结论]。此外，我们有以下的极重要的命题。

定理 11 一切渐近分数都是既约的。

证明可直接由 (8) 式得到，因为 p_n 与 q_n 的公因子同时也是表达式 $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$ 的因子。

(7) 式之第二式指出，对任何 $k \geq 2$ ， $q_k > q_{k-1}$ ；这样，序列

$$q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$$

总是递增的。我们还能够说出关于数 q_k 增加的阶和更强的结果。

定理 12 对于任何 $k \geq 2$ ①

$$q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

证明 当 $k \geq 2$ 时

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} > q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2q_{k-2};$$

继续运用此不等式可得

$$q_{2k} \geq 2^k q_0 = 2^k, \quad q_{2k+1} \geq 2^k q_1 \geq 2^k;$$

显然，这些不等式证明了此定理。

所以渐近分数分母的增加不慢于几何级数。

① 自然，在这里及以后各处都意味着：在连分数为有限时，仅仅指能使 q_k 有意义的那些 k 值。——辛钦注

中間分數. 設 $k \geq 2$, i 为任意非負整數. 容易看出, 差数

$$\frac{p_{k-1}(i+1) + p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1) + q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}i + p_{k-2}}{q_{k-1}i + q_{k-2}} = \frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1) + q_{k-2}][q_{k-1}i + q_{k-2}]}$$

对一切 $i \geq 0$ 有同一符号^①, 其符号仅由 k 的奇偶性决定. 由此可见, 分數

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}, \frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}}, \dots, \frac{p_{k-2} + a_k p_{k-1}}{q_{k-2} + a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \quad (20)$$

当 k 为偶数时构成递增序列, 当 k 为奇数时构成递减序列 (参看定理 4). 此序列两端的二项为奇偶性相同的漸近分數; 中間的那些項 (如果它們存在, 也就是当 $a_k > 1$ 时) 我們称之为 中間分數. 这些中間分數在算术应用中起着相当大的作用, 虽然其作用不及漸近分數. 为了更清楚地說明它們的相互关系及序列的形成規律, 我們引入所謂两个分數的中位数这一概念.

分數 $\frac{a+c}{b+d}$ 称为具有正数分母的两分數 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的中位数.

引理 两分數的中位数恒界于此二分數之間.

証明 为确定起見, 設 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$; 这时, $bc - ad \geq 0$, 所以

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} \geq 0, \quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{d(b+d)} \leq 0,$$

引理由此得証.

我們直接看出, 数列 (20) 的每个中間分數都是它的前一个分數和分數 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 的中位数; 这样, 我們用逐次构成中位数的办法, 在数列 (20) 中, 从漸近分數 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 向 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 推进; 当构成的中位数与 $\frac{p_k}{q_k}$ 重合时, 就完成了推进的最后一步. 所以此最后一分數介于

① 当 k 固定时, ——譯者注

$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 与 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 之間, 这一点, 我們从定理 4 已經知道了. 我們也知道此連分數之值 α 介于 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 与 $\frac{p_k}{q_k}$ 之間, 由于分數 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 与 $\frac{p_k}{q_k}$ 的阶数同为奇数或同为偶数, 所以此二分數必位于 α 的同側. 由此可見, 序列 (20) 完全位于数 α 的同一側, 而分數 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 位于其另一側. 特别是分數 $\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}$ 与 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 总是位于 α 的异側. 換句話說, 連分數的值总是介于其任一个漸近分數及此漸近分數与其前一漸近分數的中位數之間. (我們建議讀者自己繪圖以描述所有这些数的相对位置.)

这一注解指出一个簡便方法, 当我們只知道漸近分數 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 及 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 而不知道元素 α_k 时, 可用此法找到后一漸近分數 $\frac{p_k}{q_k}$ (但是要利用連分數的值 α). 事实上, 先作出此二分數的中位數, 再作此中位數与 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 的中位數, 等等, 每一次都作出已得到的中位數和分數 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 的中位數; 我們已知此中位數序列向 α 逼近; 在此序列中, 与最初的分數 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 位于 α 的同側的最后一个中位數就是 $\frac{p_k}{q_k}$. 事实上, 我們已知 $\frac{p_k}{q_k}$ 位于这些中位數之間且与 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 位于 α 的同側; 因此我們只須再指出 $\frac{p_k}{q_k}$ 以后的中位數位于 α 的另一側即可; 但其后一个中位數即為 $\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}$, 按照上面的注解, 它是位于 α 的另一側的.

另外, 从下述理由中我們得到說明 α 及其漸近分數, 中間分數的相互位置的更重要的推論.

中間分數 $\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}$ 总是介于 $\frac{p_k}{q_k}$ 与 α 之間, 所以它比 α 更接近 $\frac{p_k}{q_k}$, 即:

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \left| \frac{p_k - p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}$$

(在此式中不能取等号, 因为若写成等式就表示

$$\alpha = \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}, \quad a_{k+2} = 1,$$

也就是说 α 是末元素为 1 的有限连分数, 这是我们从本节开始就不考虑的).

这样, 我们就得到下述重要命题.

定理 13 对于一切 $k \geq 0$

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)}. \quad (21)$$

不等式(21)给出了差数 $\alpha - \frac{p_k}{q_k}$ 的下界, 显然它补充了定理 9 中的不等式, 后者给出此差数的上界.

第二章 用连分数表示数

§5 连分数是表示实数的工具

定理 14 每一个实数 α 都对应着唯一的以这个数为值的连分数。如果数 α 是有理的，则这个连分数是有限的；如果它是无理的，则是无限的^①。

证明 用 a_0 表示不超过 α 的最大整数；如果 α 不是整数，则关系式

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \quad (22)$$

能够确定数 r_1 ；显然这时， $r_1 > 1$ ，因为

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1;$$

一般地，若 r_n 不是整数，则我们以 a_n 表示不超过 r_n 的最大整数，由关系式

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}} \quad (23)$$

确定数 r_{n+1} 。

显然，这个过程可以一直继续到任何一个 r_n 不是整数的时候；这时， $r_n > 1 (n \geq 1)$ 。

关系式(22)指出，

$$\alpha = [a_0; r_1];$$

一般地，设

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, r_n]; \quad (24)$$

^① 我们提醒：我们考虑以整数为元素的连分数，且 $a_i > 0$ (对 $i \geq 1$)，同时任何有限连分数的最后元素应当不等于 1。——辛欽注

則由關係式(23)和第一章式(5)得到

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, r_{n+1}];$$

這樣，公式(24)對所有 n 正確(自然，假設 r_1, r_2, \dots, r_{n-1} 不是整數)。

若數 α 是有理的，則顯然所有的 r_n 是有理的；容易看到，在這種情況下，我們的过程在有限次以後就完結；事實上，例如，若

$$r_n = \frac{a}{b}, \text{ 則}$$

$$r_n - a_n = \frac{a - b a_n}{b} = \frac{c}{b},$$

這裡 $c < b$ ，因為 $r_n - a_n < 1$ ；關係式(23)給出：

$$r_{n+1} = \frac{b}{c}$$

(只假設 $c \neq 0$ ，即設 r_n 不是整數，因為在 r_n 是整數的情況下，我們的論斷已證明)；因而， r_{n+1} 有比 r_n 更小的分母，由此推得，在有限次以後在序列 r_1, r_2, \dots 中應當得到整數 $r_n = a_n$ ；但在這種情況下，公式(24)表示，數 α 由有限連分數表示出，其最後元素 $a_n = r_n > 1$ 。

若數 α 是无理的，則所有 r_n 是无理的，並且我們的过程是无穷的。設

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

(這裡分數 $\frac{p_n}{q_n}$ 不可約，且 $q_n > 0$)，據公式(24)及第一章公式(16)有：

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} \quad (n \geq 2);$$

另一方面，顯然，

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}},$$

由此

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})(r_n - a_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})},$$

因此,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2};$$

这样, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha;$$

但这显然意味着无限連分數 $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ 以給定的數 α 為自己的值.

因而, 我們証明了數 α 总是可以用連分數表示; 若數 α 是有理的, 則這連分數是有限的, 若它是無理的, 則這連分數是無限的. 余下我們要証明所得到的展開式的唯一性. 首先我們注意到, 實際上唯一性已由第一章 §4 中的論証推得, 在那里我們已經看到, 在知道了所給定的連分數的值后, 我們可以逐個地作出它的所有漸近分數, 因而作出它的所有元素. 然而, 我們可以很簡單地建立所要求的唯一性. 事實上, 設

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] = [a'_0; a'_1, a'_2, \dots],$$

並且這些連分數可以是有限的, 也可以是無限的. 我們約定一般地以 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數. 首先, 顯然 $a_0 = [\alpha]$ 和 $a'_0 = [\alpha]$, 所以 $a_0 = a'_0$; 其次, 若已經建立

$$a_i = a'_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

則,

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p'_i \\ q_i &= q'_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

井根據第一章公式(16), 有:

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p'_n r'_{n+1} + p'_{n-1}}{q'_n r'_{n+1} + q'_{n-1}} = \frac{p_n r'_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r'_{n+1} + q_{n-1}},$$

由此, $r_{n+1} = r'_{n+1}$, 而因為 $a_{n+1} = [r_{n+1}]$ 和 $a'_{n+1} = [r'_{n+1}]$, 所以 $a_{n+1} = a'_{n+1}$, 即所給的二連分數完全一樣, 定理由此得証.

注意,如果我們允許有以 1 為最後元素的有限連分數,則後一個論證就不可能了。事實上,例如,若 $a_{n+1}=1$ 是這樣的後元素,則 $r_n = a_n + 1$, 而 $a_n \neq [r_n]$ 。

這樣,我們深信,實數可用連分數唯一地表示。自然,這樣表示的主要意義在於,當知道了表示實數 α 的連分數後,我們可以確定這個數到任意預先給定的精確度。由於這點,連分數工具在實數的表示中至少在原則上起着,例如象十進位系統的或更一般系統的(即建立在這樣或那樣的計數系統上的)小數那樣的作用。

作為表示實數的工具,連分數和更通行的進位系統小數比較,其主要缺點是什麼呢?為了回答這個問題,首先需要了解對這種工具能夠和應當提出什麼樣的要求。顯然,第一個基本的理論上的要求應當是,工具能盡量完滿地反映出它所表示的數的性質,使這些性質在用這個工具表示數的任何場合下,可以盡量完滿和盡量簡單地顯示出來。

在這第一個要求方面,連分數比其他系統小數(特別是十進位小數)有無可懷疑的和相當大的優點。在本章的敘述過程中我們將逐漸地深信這些;其實,在某種程度上,由以下先驗性的設想,這一點將是明顯的,即:任何系統的小數都與確定的計數系有關,因此不可避免地反映出一些與其說是它所表示的數的絕對性質,不如說是此數與其選取的計數系的相互關係,而連分數無論同怎樣的計數系都無關,並且用它所表示的數的性質,在很純粹的形式中就表達出來了。比方,我們已經看到,所表示的數的有理性或無理性找到了自己的相應的有限的或無限的連分數的完全表達式。我們都知道,對於各系統小數,相應的特徵很複雜;表示小數的有限性或無限性除了與所表示的數的性質有關外,主要地與選取的計數系有關。

但是,除了我們所指出的基本理論的要求外,對於表示數的任何工具,自然應當提出實用性的要求(其實,這些要求中的某些還

可能有一定的理論價值)。例如說,使工具能尽可能簡單地按預定的精確度求出所表示的數的近似值,這個要求也是很重要的。連分數工具在很高的程度上滿足這個要求,並且在任何情況下比各種計數系統的小數這類工具要好;此外,我們很快就會相信,用這種工具所給出的近似值,在某種意義上,非常簡單和有重要意義,具有最佳逼近的性質。

但是,另外還有更主要的實用要求,這個工具完全不能滿足。計算的需要迫使我們希望任何表示工具,在知道了幾個數的表示時,我們可以相當容易地找出這些數間的最簡單的函數關係和表示式(首先是它們的和與積)。簡單地說,適用於實用方面的工具應當服從充分簡單的算術運算法則,沒有這一點它就不可以作為計算工具。大家知道,系統小數在這方面是多麼便利。相反,對於連分數,不存在任何實際可行的算術運算法則;尋找由連分數構成的和的連分數的問題,非常複雜並且在計算實踐中是作不到的。

我們所指出的連分數和系統小數相比較的優缺點在很大程度上預先決定了這兩種表示工具的应用範圍的劃分。可是正如在計算實踐中幾乎只用系統小數一樣,在理論研究中,當研究連續統的算術規律和部分無理數的算術性質時,連分數工具找到了自己的重大应用,它是這類研究的最好的和不可少的工具。考察這個工具在這方面的作用是以下所有各節的基本任務。

§6 漸近分數作為最佳逼近

當希望以某種精確度表示無理數 α 成通常的有理分數時,自然,為了這個目的,我們可以利用表示 α 的連分數的漸近分數。這時,所達到的精確度被第一章定理 9 與定理 13 所確定;即,我們有:

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

無理數用既有有理分數來逼近(近似表示)的問題通常是這樣提的,找具有最小(正的)分母的可理分數,使與給出的無理數的差不超過某一個預先給定的值。其實,用這樣方法所提出的問題,當給出的數 α 是有理數時也有意義;比方說,如果 α 是分子分母都很大的分數,可以提出關於用分子分母都比它小的分數來近似表示它的問題。從純粹的實用觀點來看,這兩種情況(有理的和無理的 α)之間並沒有本質的不同,因為在實際中任何數都只確定到某種精確程度。

很明顯,為了解決這個問題,系統小數這類工具完全不適用,因為用它所給出的逼近分數有僅由所選取的計數系(在十進小數時,分母是數10的冪)所確定的完全不依賴於所表示的數的算術性質的分母。相反,在連分數的情況下,漸近分數的分母完全被用這個分數所表示的數來確定,因此我們有足够的根據預料,漸近分數因它與所表示的數有密切的和自然的聯繫而被所表示的數完全確定,所以它在解決用有理分數最佳逼近這個數的問題中應當起着重要的作用^①。

我們約定稱有理分數 $\frac{a}{b}$ ($b > 0$) 為實數 α 的最佳逼近,如果任何別的具有分母不超過它的分母的可理分數與 α 有更大的距離,換言之,如果 $0 < d \leq b$, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ 必須推得:

① М. В. 奧斯特洛格拉得斯基 (Остроградский) 在世時就提出了為表示無理數的兩種有趣的算法。在蘇聯烏克蘭科學院的原稿匯集中曾以很小的篇幅登載了他的關於這方面的簡短的附注。在 Е. Н. 列茨茲 (Лецз) 的“關於可與表示無理數的奧斯特洛格拉得斯基的兩種算法相聯系的交錯級數 (О аналитических рядах, которые могут быть связаны с двумя алгоритмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел, УМН 6, 5 (45), 93~142, 1951)”一文中曾推廣了這些附注。正象列茨茲所說過的那樣,奧斯特洛格拉得斯基的算法在某些情況下得出了比連分數更好的逼近。可惜,到現在為止,詳細地研究它們,其中包括為了計算目的的,並沒有實現。——格溫室科法

$$\left| \alpha - \frac{c}{d} \right| > \left| \alpha - \frac{a}{b} \right|.$$

定理 15 數 α 的任何最佳逼近, 都是這個數的連分數的漸近分數, 或中位數.

預先指出, 为了使这个命題沒有例外, 象我們在 § 2 所約定的那樣, 必須在研究中引入 -1 階的漸近分數, 設 $p_{-1}=1, q_{-1}=0$. 事實上, 例如, 容易相信, 分數 $\frac{1}{3}$ 是數 $\frac{1}{4}$ 的最佳逼近, 但它沒有包含在數 $\frac{1}{4}$ 的漸近分數和中位數之列, 因為, 如果從零階漸近分數開始, 這些分數的全体只有二項: $\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{4}$; 反之, 如果取分數 $\frac{1}{0}$ 作為 -1 階漸近分數, 則這些分數全体為如下形式:

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},$$

因而包含了分數 $\frac{1}{3}$.

証明 設 $\frac{a}{b}$ 是數 α 的最佳逼近, 則首先 $\frac{a}{b} \geq a_0$; 事實上, 在 $\frac{a}{b} < a_0$ 的情況下, 異於 $\frac{a}{b}$ 且分母小於 b 的分數 $\frac{a_0}{1}$ 比 $\frac{a}{b}$ 距 α 更近, 因而 $\frac{a}{b}$ 不可能是最佳逼近了.

由完全類似的推导我們可以証明,

$$\frac{a}{b} \leq a_0 + 1.$$

因而, 我們有權假設, $a_0 < \frac{a}{b} < a_0 + 1$ (在 $\frac{a}{b} = a_0$ 或 $\frac{a}{b} = a_0 + 1$ 時定理已得証, 因為 $\frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$ 是數 α 的漸近分數, 而 $\frac{a_0+1}{1} = \frac{p_0+p_{-1}}{q_0+q_{-1}}$ 是數 α 的中位數).

如果分數 $\frac{a}{b}$ 不等於數 α 的任何一個漸近分數或中位數, 則它應當在這種分數的二個序列之間, 即, 在適當选取 k 和 r 時 ($k > 0, 0 \leq r < a_{k+1}$ 或 $k=0, 1 \leq r < a_1$), 它在分數

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \quad \text{和} \quad \frac{p_k(r+1) + p_{k-1}}{q_k(r+1) + q_{k-1}}$$

之間, 由此

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \right| < \frac{p_k(r+1) + p_{k-1}}{q_k(r+1) + q_{k-1}} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \\ = \frac{1}{\{q_k(r+1) + q_{k-1}\} \{q_k r + q_{k-1}\}}.$$

但, 另一方面, 显然,

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \right| = \frac{m}{b(q_k r + q_{k-1})},$$

这里 m 是至少等于 1 的某个正整数; 因而,

$$\frac{1}{b(q_k r + q_{k-1})} < \frac{1}{\{q_k(r+1) + q_{k-1}\} \{q_k r + q_{k-1}\}},$$

由此,

$$q_k(r+1) + q_{k-1} < b.$$

这样, 分数

$$\frac{p_k(r+1) + p_{k-1}}{q_k(r+1) + q_{k-1}} \quad (25)$$

的分母小于 b , 且比分数

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \quad (26)$$

更接近数 α (因为根据 §4 結果一般地說任何后面的中位数比前面的更接近 α), 而这意味着, 比界于 (25) 和 (26) 之間的分數 $\frac{\alpha}{b}$ 更接近 α ; 但这跟最佳逼近的定义矛盾, 因而定理 15 得証.

在作为这定理基础的最佳逼近概念的定义中, 我們已經估計了差 $\alpha - \frac{a}{b}$ 这个微量 (按绝对值) 并用它来表示有理分數 $\frac{a}{b}$ 与数 α 的接近程度, 当然, 这是很自然的; 然而, 在数論中为了这个目的考虑差 $b\alpha - a$ 常常是更重要或更方便的, 它不同于前者的只是一个因子 b , 因此它的微量 (按绝对值) 也可以作为分數 $\frac{a}{b}$ 与 α 的接

近程度的標準。從一種鑑定法過渡到另一種鑑定法驟然看來似乎是不必證明的，並且實際上在多數情況下是這樣的；然而並不總是那樣，我們馬上就會深信這點；問題在於，區別於這兩個差的因子 b 不是常數，而是同逼近的分數有關，且隨分數的變化而變化。

現在我們約定稱在定理 15 中講述過的那種最佳逼近為第一類型的最佳逼近；其次，我們約定稱有理分數 $\frac{a}{b}$ ($b > 0$) 為數 α 的第二類型的最佳逼近，如果由 $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leq b$ 必然推得

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|.$$

因而，第二類型的最佳逼近借助於特徵 $|b\alpha - a|$ 來確定，完全類似於第一類型的最佳逼近借助於特徵 $|\alpha - \frac{a}{b}|$ 來確定。

不難證明，任何第二類型的最佳逼近同時一定是第一類型的最佳逼近。

事實上，如果我們已有

$$\left| \alpha - \frac{c}{d} \right| \leq \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \quad \left(\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}, d \leq b \right),$$

則，將兩個不等式逐項地連乘^①，我們得到：

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a|;$$

換句話說，如果分數 $\frac{a}{b}$ 不是第一類型的最佳逼近，則它就不可能是第二類型的最佳逼近，由此定理得到證明。

然而，逆命題不正確：第一類型的最佳逼近可能不是第二類型的最佳逼近。事實上，很容易相信，例如，分數 $\frac{1}{3}$ 是數 $\frac{1}{5}$ 的第一類型的最佳逼近；但它不是第二類型的最佳逼近，由不等式

$$\left| 1 \cdot \frac{1}{5} - 0 < 3 \cdot \frac{1}{5} - 1 \right|, \quad 1 < 3$$

① 指將 $\left| \alpha - \frac{c}{d} \right| \leq \left| \alpha - \frac{a}{b} \right|$ 與 $d \leq b$ 兩不等式的左端連乘，且右端亦連乘。——譯者注

可看出这一点。

由所作的附注及定理 15 推得, 一切第二类型的最佳逼近是渐近分数或中位数。然而, 我们可以建立更精确得多的命题, 连分数工具对于第二类型的最佳逼近所起作用的主要保证就在这里。

定理 16 任何第二类型的最佳逼近是渐近分数。

证明 设分数 $\frac{a}{b}$ 是数

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

的第二类型的最佳逼近, α 的渐近分数以 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示。如果 $\frac{a}{b} < a_0$, 则我们有:

$$|1 \cdot \alpha - a_0| < \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \leq |b\alpha - a|, \quad 1 \leq b,$$

即 $\frac{a}{b}$ 不是第二类型的最佳逼近; 因而 $\frac{a}{b} \geq a_0$ 。但在这样的情况下, 分数 $\frac{a}{b}$ 如果不等于任何一个渐近分数, 就应当或者在二个有相同奇偶性的渐近分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 与 $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ 之间, 或者大于 $\frac{p_1}{q_1}$ 。在第一种情况下

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| \geq \frac{1}{bq_{k-1}}$$

和

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}},$$

由此

$$b > q_k; \quad (27)$$

另一方面,

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bq_{k+1}},$$

可知,

$$|b\alpha - a| \geq \frac{1}{q_{k+1}},$$

同时

$$|q_k \alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}},$$

由此

$$|q_k \alpha - p_k| \leq |b\alpha - a|; \quad (28)$$

关系(27)与(28)表明, $\frac{a}{b}$ 不是第二类型的最佳逼近.

在第二种情况里(即如果 $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}$), 我们有:

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| > \frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b} > \frac{1}{bq_1},$$

由此

$$|b\alpha - a| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1};$$

另一方面, 显然,

$$|1 \cdot \alpha - a_0| \leq \frac{1}{a_1},$$

所以

$$|b\alpha - a| > |1 \cdot \alpha - a_0|, \quad 1 \leq b,$$

又与第二类型的最佳逼近概念矛盾. 因而, 定理 16 完全得证.

现在我们研究定理 15 和 16 之逆的可能性问题. 首先, 容易看出, 定理 15 不可逆; 中位数可以不是第一类型的最佳逼近; 比如, 容易看出, 对于数 $\alpha = \frac{4}{5}$, 分数 $\frac{1}{2}$ 是中位数; 但它不是最佳逼近, 因为

$$\left| \frac{4}{5} - \frac{1}{1} \right| < \left| \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \right|, \quad 1 < 2.$$

可以作出随便多少个类似的例子, 读者自己可以毫无困难地相信这些.

相反, 定理 16 允许几乎完全的逆定理, 自然, 这也就特别地增加了它的意义.

定理 17 任何漸近分數是第二类型的最佳逼近; 唯一的(明显

的)例外是

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

预先指出. 在情况 $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ 时, 分数 $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ 实际上不是第二类型的最佳逼近, 因为

$$|1 \cdot \alpha - (a_0 + 1)| = 1; |1 \cdot \alpha - a_0|.$$

证明 我们研究形式

$$|y\alpha - x|, \quad (29)$$

这里 y 取值 $1, 2, \dots, q_k$, 而 x 可以取任意整数值. 用 y_0 表示 y 这样的值, 在 y 取这个值时, 相应的选取 x 后, 式 (29) 取最小可能值 (如果这样的 y 值有几个, 则取其中最小者作为 y_0). 用 x_0 表示使 $|y_0\alpha - x|$ 达到最小值的 x 值. 容易相信, 这个值是唯一的. 事实上, 如果我们有

$$\left| \alpha - \frac{x_0}{y_0} \right| = \left| \alpha - \frac{x'_0}{y_0} \right| \quad (x_0 \neq x'_0),$$

则, 显然, 有

$$\alpha = \frac{x_0 + x'_0}{2y_0}.$$

我们断定, 这个分数不可约. 其实, 若 $x_0 + x'_0 = lp, 2y_0 = lq$ ($l > 1$), 则在 $l > 2$ 的情况下, 我们有:

$$q < y_0, \quad \alpha = \frac{p}{q}, \quad |q\alpha - p| = 0,$$

而与 y_0 的定义矛盾; 如果 $l = 2$, 则 $q = y_0$,

$$|q\alpha - p| = |y_0\alpha - p| = 0 < |y_0\alpha - x_0|,$$

而与 x_0 的定义矛盾.

将有理数 α 展成连分数, 因此我们有:

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n = x_0 + x'_0, \quad q_n = 2y_0 = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad a_n \geq 2;$$

因此, 如果 $a_n > 2$ 或 $a_n = 2, n > 1$, 则我们有 $q_{n-1} < y_0$; 但

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2y_0} \leq \frac{1}{2} \leq |y_0\alpha - x_0|,$$

与 y_0 定义矛盾；如果 $n=1$, $a_n=2$, 則 $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, $y_0=1$, 这恰恰是被我們除去的情况。

于是, 值 y_0 和 x_0 被給定的条件以唯一形式确定。由此直接推得, $\frac{x_0}{y_0}$ 是数 α 的第二类型的最佳逼近, 因为不等式

$$|b\alpha - a| \leq |y_0\alpha - x_0| \quad \left(\frac{a}{b} \neq \frac{x_0}{y_0}, b \leq y_0 \right),$$

显然, 与数 x_0 和 y_0 的定义矛盾。因此, 根据定理 18, 我們有:

$$x_0 = p_s, y_0 = q_s \quad (s \leq k).$$

如果 $s=k$, 則定理得証; 但如果 $s < k$, 則我們有:

$$|q_s\alpha - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \geq \frac{1}{q_{k-1} + q_k}, \quad |q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}},$$

而因为根据数 $p_s = x_0$ 和 $q_s = y_0$ 的定义, 有

$$|q_s\alpha - p_s| \leq |q_k\alpha - p_k|,$$

所以

$$\frac{1}{q_{k-1} + q_k} < \frac{1}{q_{k+1}},$$

即

$$q_{k+1} < q_k + q_{k-1},$$

根据数 q_k 的构成規律, 这是不可能的。因而, 定理 17 得証。

在本节中我們所确立的連分數工具的这些性质, 在历史上是发现和研究这个工具的第一个原因。肯格斯 (Гюйгенс) 在立意借助于齿輪来建立太阳系的模型后, 在决定輪子齿数的问题之先提出了, 要使两个彼此相联的輪子的齿数之比 (等于它們完全回轉一周所需的時間之比) 尽可能接近于相应的行星轉动時間的比 α 。同时由于技术原因, 当然, 齿数不能过多。因而, 提出了关于寻求这样的有理分数的問題, 它的分子和分母不超过已給的界限, 并且它同时尽量地接近于已知数 α (在理論上这个数可能是无理数, 在

实践上在这种情况下则可以认为 α 是分子和分母都很大的有理分数；我們已經看到，連分數理論給出了完全解决按这种方式提出的問題的可能性。

§7 逼近的阶

在前面一节中，我們在跟同类型的另一种差的比較下作了对差 $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$ 的微量的估計。在这里，我們將从事这个差的微量本身的估計，而不牵涉到这种类型的另外一种差数。显然，为了估計量 $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$ 的大小，自然的方法是將它同 q_k 的任何减函数比較。在这方面，由第一章定理 9 直接推得不等式^①：

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}. \quad (30)$$

因此，首先引起的問題是这个不等式还能不能加强，即將它的右端部分用分母 q_k 的另外的函数 $f(q_k)$ 来代替，而此函数对一切 $n \geq 1$ 满足不等式

$$f(n) < \frac{1}{n^2}.$$

容易看到，如果我們希望，用这样方法所加强的不等式(30)对任意 α 在一切 k 值时都成立，則在这方面任何实质的加强都不能达到；确切地说，对无论怎样小的 $\varepsilon > 0$ ，总可以指出

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1-\varepsilon}{q_k^2}$$

的情况；为了相信这点，只需研究数

$$\alpha = [0; n, 1, n] = \frac{n+1}{n(n+2)},$$

对于这个数

^① 在情况 $\alpha = \frac{p_k}{q_k}$ 时(当定理 9 由于缺少 q_{k+1} 不能应用时)，不等式(30)成为明显的。——辛欽注

$$p_1=1, q_1=n, p_3=n+1, q_3=n(n+2),$$

因此

$$\left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right| = \left| \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1} \right| = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{\left[q_1^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right]};$$

选取 n 使不等式

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{n}} > 1 - \varepsilon$$

成立, 則有

$$\left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right| > \frac{1 - \varepsilon}{q_1^2}.$$

但如果放弃使得加强的不等式在任意 α 时对一切 k 值无例外地成立这个要求, 則象我們立刻要証明的那樣, 我們可以得到許多有趣而又重要的命題.

定理 18 如果数 α 有 $k > 0$ 阶的漸近分數, 則两个不等式

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{2q_k^2}, \quad \left| \alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \frac{1}{2q_{k-1}^2}$$

中一定至少有一个成立.

証明 因为 α 在 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 和 $\frac{p_k}{q_k}$ 之間, 所以

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| + \left| \alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}} < \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2}$$

(最后的不等式表示这样一个事实, 即 $\frac{1}{q_k^2}$ 和 $\frac{1}{q_{k-1}^2}$ 的几何平均值小于它們的算术平均值; 等号仅仅当 $q_k = q_{k-1}$ 时可能, 在已給的情况下已除去). 显然, 由此直接推得定理的論断.

我們所証明的命題特別有趣, 因为它在某种意义上的逆定理也成立.

定理 19 满足不等式

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

的任何既約有理分数 $\frac{a}{b}$ 是数 α 的渐近分数.

証明 据定理 16, 只需証明分数 $\frac{a}{b}$ 对数 α 是第二类型的最佳逼近. 設

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a| < \frac{1}{2b} \quad \left(d > 0, \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}\right);$$

則

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2bd},$$

因而,

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bd} + \frac{1}{2b^2} = \frac{b+d}{2b^2d}; \quad (31)$$

另一方面, 因为 $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, 所以

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bd};$$

因此不等式 (31) 給出

$$\frac{1}{bd} < \frac{b+d}{2b^2d},$$

由此 $d > b$; 因而分数 $\frac{a}{b}$ 实际上是数 α 的第二类型最佳逼近, 定理 19 得証.

下面更为深刻的定理是定理 18 的进一步加强.

定理 20 如果数 α 有 $k > 1$ 阶的渐近分数, 則下面三个不等式

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} q_k^2}, \quad \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} q_{k-1}^2},$$

$$\left|\alpha - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} q_{k-2}^2}$$

中一定至少有一个成立.

① 在 И. И. 邵津 (Жоин) 的“連分数理論中一个定理証明的改进 (Вариант доказательства одной теоремы из теории ланых дробей)”, УМН 12, 3, 321~322 (1957) 注記中, 給出这里所引入的証明的某些簡化. ——梅涅堅科注

証明 对于 $k \geq 1$ 我們假設

$$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \varphi_k, \quad \varphi_k + r_k = \psi_k.$$

引理 如果 $k \geq 2$, $\psi_k < \sqrt{5}$, $\psi_{k-1} \leq \sqrt{5}$, 則

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

事实上, 因为

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n+1}} = a_n + \varphi_n \quad (32)$$

和

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}},$$

所以

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} + \frac{1}{r_{n+1}} = \varphi_n + r_n = \psi_n,$$

根据引理的条件, 因此

$$\varphi_k + r_k \leq \sqrt{5}, \quad \frac{1}{\varphi_k} + \frac{1}{r_k} \leq \sqrt{5},$$

由此

$$\left(\sqrt{5} - \varphi_k\right)\left(\sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_k}\right) \geq 1,$$

或者, 因为 φ_k 是有理数,

$$5 - \sqrt{5}\left(\varphi_k + \frac{1}{\varphi_k}\right) > 0,$$

因为 $\varphi_k > 0$, 由此我們得到

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k\right)^2 < \frac{1}{4},$$

因而

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k < \frac{1}{2}, \quad \varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

引理得証.

現在假設与我們的論断相反,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2} \quad (n=k, k-1, k-2);$$

根据第一章公式(16), 有:

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n (q_n r_{n+1} + q_{n-1})} \\ &= \frac{1}{q_n^2 (r_{n+1} + \varphi_{n+1})} = \frac{1}{q_n^2 \psi_{n+1}}, \end{aligned}$$

因而

$$\psi_{n+1} \leq \sqrt{5} \quad (n=k, k-1, k-2).$$

在我们的引理的基础上我们由此推得

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \varphi_{k+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

根据等式(32), 这意味着

$$\alpha_k = \frac{1}{\varphi_{k+1}} - \varphi_k < \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

但这是不可能的; 显然, 所得到的矛盾证明了定理 20.

定理 18 和 20 使我们产生了一个明显的想法: 它们可以成为进一步推广的一连串命题的起点. 然而这个想法是错误的. 事实上, 我们研究数

$$\alpha = [1; 1, 1, \dots];$$

象通常那样, 假设 $\alpha = 1 + \frac{1}{r_1}$, 显然, 我们有 $r_1 = \alpha$, 由此

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

因而,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

显然, 因为在任意 n 时 $r_n = \alpha$, 所以

$$\alpha = \frac{p_k \alpha + p_{k-1}}{q_k \alpha + q_{k-1}},$$

因而,

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k(q_k\alpha + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k^2 \left(\alpha + \frac{q_{k-1}}{q_k} \right)}.$$

但根据第一章定理 6 我們有:

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [1; 1, 1, \dots, 1] \rightarrow \alpha \quad (k \rightarrow \infty),$$

由此

$$\frac{q_k}{q_k} = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \varepsilon_k \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty \text{ 时 } \varepsilon_k \rightarrow 0).$$

这样,

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k^2 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \varepsilon_k \right)} = \frac{1}{q_k^2 (\sqrt{5} + \varepsilon_k)}.$$

这表明,对無論怎样的数 $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, 当 k 充分大时,我們一定有

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{c}{q_k^2}.$$

因而,如果我們希望相应的不等式在任意 α 时对 k 的无穷多个值成立,則定理 20 中的常数 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 不可以用任何更小的常数来代替. 对于所有更小的常数,我們找到了这样的 α , 它只对有限多个 k 值满足所要求的不等式(即 $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$); 特别是,从定理 18 和 20 所开始的一連串命題終止于后一个定理,不允許作进一步的推广.

§ 8 逼近的一般法則

到目前为止,我們特別注意到用漸近分數給出的近似法,并且闡明了同这个題目相关的一系列基本問題. 但因为当时我們已相信,在一定的意义下漸近分數是最佳逼近,所以我們可以估計到,所得到的結果使我們能够充分地研究用有理分數作無理數的近似时所遵循的規律,而不依賴于任何特殊的表示工具. 現在我們着手于問題的這個範圍. 在这本初等教程的領域里,自然,我們不可

能给出多少相应理论的基础的完全叙述,这不仅仅是由于篇幅有限,而且主要是因为“它只同我们的问题有间接的联系.自然,我们只限于引入一系列基本命题,它们应当说明连分数在研究无理数的算术性质时的应用.

与前节的结果相联系,在这里第一个自然产生的问题可用下述方式陈述:对于怎样的常数 c , 不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^2} \quad (33)$$

对于任意实数 α 都有无数多个整数解 p 和 q ($q > 0$)? 前节的最后结果使我们容易得到下述的命题.

定理 21 如果 $c \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$, 则不等式 (33) 在任意实数 α 时有无数多个整数解 p 和 q ($q > 0$); 如果 $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, 则当适当选取 α 时, 不等式 (33) 只有有限个这样的解.

事实上, 第一个论断是定理 20 的直接推论 (在 $\alpha = \frac{a}{b}$ 为有理数时, 只有有穷个渐近分数, 如果我们设 $q = nb, p = na, n = 1, 2, \dots$, 则定理 21 的第一个论断成为明显的). 因此, 设 $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$; 象在 §7 中那样, 我们假设,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, \dots].$$

如果整数 p 和 q ($q > 0$) 满足不等式 (33), 则根据定理 19, $\frac{p}{q}$ 是数 α 的渐近分数; 但在 §7 末尾我们已看到, 如果 $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, 则这些渐近分数中满足不等式 (33) 的只有有限个. 显然, 我们的命题完全得证.

因而, 一般地说, 如果顾及到所有可能的实数 α , 则用量 $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ 来描述的逼近的阶不能更加强. 自然, 这并不意味着不存在这样个别的无理数 α , 对于它可能有更高程度的逼近. 相反, 在

这方面的可能性是完全无限制的，借助于連分數工具便能很简单地使我们相信这点。

定理 22 对无论怎样的自然数变数 q 的正函数 $\varphi(q)$ ，都可以找到这样的无理数 α ，对于它，不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varphi(q)$$

有无数多个整数解 p 和 q ($q > 0$)。

証明 我們作无穷連分數 α ，依次地选取它的元素，使得它們滿足不等式

$$a_{k+1} > \frac{1}{q_k^2 \varphi(q_k)} \quad (k \geq 0),$$

自然，可以用无数多种方法来作（这时 a_0 可以任意选取），所以对于任意 $k \geq 0$

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{q_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1})} \leq \frac{1}{a_{k+1} q_k^2} < \varphi(q_k),$$

这就証明了定理。

現在我們注意到，在一般情況下，不等式

$$\frac{1}{q_k (q_k + q_{k+1})} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

或者

$$\frac{1}{q_k^2 \left(a_{k+1} + 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k} \right)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{\left(q_k^2 a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k} \right)}$$

給出

$$\frac{1}{q_k (a_{k+1} + 2)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}}, \quad (34)$$

由此看到，当已給定 a_0, a_1, \dots, a_k 时，若下一个元素 a_{k+1} 越大，分數 $\frac{p_k}{q_k}$ 就越逼近数 α ；而因为漸近分數在一切情況下都是最佳逼近，所以我們得出結論：如果无理数的元素中有很大的数它就可用有理分數来很好地逼近；这个定性的評論具体表現在定量的表示

式上,即不等式(34)上.特别是,逼近程度最坏的将是具有有界元素的无理数.因此我们明白了,当希望得到一个这样的无理数,它不能达到由上述定义给出的阶的近似时,为什么我们屡次地选取数

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1; 1, 1, \dots];$$

显然,在所有无理数中,它具有最小可能的元素(不计 a_0 ,在这里它不起任何作用),因此对它用有理分数所作的逼近,比一切其余的无理数都要好些.

具有有界元素的数所固有的逼近的特殊性完全具体表现在以下命题中,在我们所作的一切注解以后这个命题几乎变为明显的了.

定理 23 对于具有有界元素的任何无理数 α , 不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^2} \quad (33)$$

在 c 充分小时,没有整数解 p 和 q ($q > 0$). 反之,对于具有无界的元素序列的任何数 α , 不等式(33), 在任意 $c > 0$ 时,有无数个这样的解.

换句话说,元素为有界的无理数,只允许不超过 $\frac{1}{q^2}$ 阶的逼近,而元素为无界的无理数允许作更高阶的逼近.

证明 如果表示 α 的连分数的元素中有任意大的数,则对于任意 $c > 0$,可以找到无数多个满足

$$a_{k+1} > \frac{1}{c}$$

的 k 值,因而,根据不等式(34)的第二部分,对于这无数多个 k 值我们有:

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{c}{q_k^2},$$

这就证明了定理的第二个论断.

如果存在这样的 $M > 0$, 使

$$\alpha_k < M \quad (k=1, 2, \dots),$$

則根据不等式(34)的第一部分, 对于任意 $k \geq 0$ 我們有:

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)}.$$

由此, 对于任意整数对 p 和 $q (q > 0)$, 由不等式

$$q_{k-1} < q \leq q_k$$

确定指标 k 后, 并記住所有漸近分數是第一类型的最佳逼近, 我們有:

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &\geq \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)} \\ &= \frac{1}{q^2(M+2)} \left(\frac{q}{q_k} \right)^2 > \frac{1}{q^2(M+2)} \left(\frac{q_{k-1}}{q_k} \right)^2 \\ &= \frac{1}{q^2(M+2)} \left(\frac{q_{k-1}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \right)^2 \\ &> \frac{1}{q^2(M+2)} \cdot \frac{1}{(a_k+1)^2} > \frac{1}{(M+2)(M+1)^2 q^2}; \end{aligned}$$

因而, 如果我們选取

$$c < \frac{1}{(M+2)(M+1)^2},$$

則不等式(33)对任一整数对 p 和 $q (q > 0)$ 都不满足; 定理的第一个論断由此得証.

到目前为止我們处处用差 $\alpha - \frac{p}{q}$ 的微小程度来估計逼近的程度; 然而, 类似于我們在 § 6 所作的那样, 在这里我們可以考慮用差 $q\alpha - p$ 来代替此差数, 并在我們所証明的命題中作出公式的相应变化. 这个簡單的附注直接引导到在我們研究的問題上某些新的和非常重要的观点.

两个自变量 x, y 的最簡單的齐次綫性方程是:

$$ax - by = 0, \quad (35)$$

这里 α 是已知的无理数, 自然, 不可能有精确的整数解^①; 然而, 可以提出关于它的近似解的问题, 即关于选择这样的整数 x, y , 使差 $\alpha x - y$ 达到这种或那种微小的程度. 显然, 本节所有前面的定理可以说明方程 (35) 的整数近似解所服从的规律. 例如, 定理 21 表明, 总存在满足

$$|\alpha x - y| < \frac{c}{x} \quad (36)$$

的无数多个这样的整数对 x 和 y ($y > 0$), 如果 c 是不小于 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 的正数.

由这个新的观点自然地由齐次方程 (35) 转到非齐次方程

$$\alpha x - y = \beta, \quad (37)$$

这里 β 是任意已知实数, 并且研究它的整数近似解 x, y 的可能性和特征, 换句话说, 研究在企图用适当选择的整数 x, y 使差 $\alpha x - y - \beta$ 成为尽可能小时所出现的规律性.

这个问题是俄罗斯学者 П. Л. 车比雪夫 (Чебышев) 首先提出的, 并得到了与它有关的第一个基本结果. 现在, 它的研究还在继续着.

非齐次情况不同于齐次情况的第一个基本特殊性是, 为了可能用适当选择整数 x 和 y 的办法, 使量 $|\alpha x - y - \beta|$ 对任何 β 都能够任意地小, 实际上必须数 α 是无理的 (在齐次情况下, 对任意 α 可以使量 $|\alpha x - y|$ 任意地小).

事实上, 如果 $\alpha = \frac{a}{b}$, 这 $b > 0$ 和 a 是整数, 则, 设 $\beta = \frac{1}{2b}$ 之后, 对任意整数 x 和 y 我们有:

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{2(\alpha x - by) - 1}{2b} \right| \geq \frac{1}{2b},$$

因为 $|2(\alpha x - by) - 1|$ 是奇整数, 至少等于 1.

因而, 今后我们将认为数 α 是无理的. 在这个条件下, 将如我

① 自然, 不计平凡解 $x=y=0$. —— 辛欽法

們現在所料, 不仅总能够使量 $|ax-y-\beta|$ 任意地小, 而且与齐次情况相比还可以作更大的推广.

定理 24 (車比雪夫) 对于任意无理数 α 和任意实数 β , 不等式 $|ax-y-\beta| < \frac{3}{x}$ 有无数多个整数解 x 和 $y (x > 0)$ ①.

預先指出. 显然, 这个結果十分类似于具体表现于定理 21 的齐次方程的相应性质; 不同点仅仅是在这里把常数 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 換成了 3; 逼近的阶还是和原来一样. 我們还指出, 在这里数 3 不是一切可能值中最小的, 而且不破坏定理 24 之正确性的那些数的下确界很小.

証明 設 $\frac{p}{q}$ 是数 α 的任意漸近分數; 則我們有

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \quad (0 < \delta < 1); \quad (38)$$

其次, 对無論怎样的实数 β , 我們都能够找到这样的数 t , 使

$$|q\beta - t| < \frac{1}{2},$$

由此

$$\beta = \frac{t}{q} + \frac{\delta'}{2q} \quad (\delta' < 1). \quad (39)$$

因为数 p 和 q 除 ± 1 外沒有公因子, 所以存在整数对 x, y , 滿足关系式 ②:

① 几个更强的定理之簡單証明, 由 A. И. 辛欽在“Диофантос 近似理論中的狄利赫里 (Dirichlet) 原理 (Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений)”一文中求得, УМН 3, вып. 3, 1948 (参看 17~18 頁). 进一步的明确說明載于 A. Я. 辛欽的“关于車比雪夫問題 (О задаче Чебышева)”一文中, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 281~294, 1946. — 格涅堅科注

② 証明如下: 如果 $\frac{t}{q}$ 是紧接于 $\frac{p}{q}$ 之前的数 α 的漸近分數, 則

$$qr - ps = \varepsilon = \pm 1, \quad q(kr + t) - p(st) = k\varepsilon = \pm k,$$

并且对任意整数 k

$$p(kq - \varepsilon st) - q(kp - \varepsilon rt) = t;$$

但 k 可以选取得使

$$\frac{q}{2} \leq x = kq - \varepsilon st < \frac{3q}{2}. \quad \text{--- 辛欽注}$$

$$\frac{q}{2} \leq x < \frac{3q}{2}, \quad px - qy = t.$$

但在这样的情况下, 据关系式(38)和(39)我們有:

$$\begin{aligned} |\alpha x - y - \beta| &= \left| \frac{x\delta}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - y - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{2q} \right| \\ &= \left| \frac{x\delta}{q^2} - \frac{\delta'}{2q} \right| < \frac{x}{q^2} + \frac{1}{2q}, \end{aligned}$$

而因为

$$q > \frac{2}{3}x,$$

所以

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x} = \frac{3}{x};$$

最后, 数 q 可以选取得充分地大, 而因为 $x \geq \frac{q}{2}$, 所以 x 也充分地大; 显然, 定理由此得证.

但是, 关于方程(37)的近似整数解的問題还可以用另外的形式来提出, 也許还更合理些. 因为問題的实质是用选取尽可能不大的整数 x, y 的方法, 使量 $|\alpha x - y - \beta|$ 尽可能地小, 所以用下面的形式提出問題最自然. 我們知道 (根据方才証明了的定理 24), 如果給出了充分大的正数 n , 则在任意无理数 α 和任意实数 β 时, 可以找到整数 $x > 0, y$, 满足不等式:

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}; \quad (40)$$

然而定理 24, 一般地說, 沒有告訴我們, 为达到用量 $\frac{1}{n}$ 所描述的精确度的要求, 应在怎样的范围内寻找这些数; 例如, 如果我們可以指出依赖于 n 但不依赖于 α 和 β 的数 N , 使不等式(40)在补充条件

$$|x| \leq N$$

下总能够满足, 則这个目的就已达到.

显然，問題的这个新提法与迄今我們所研究的有本质上的区别；如果以前的（在定理 24 中）逼近度全靠数 x 的值来确定，則現在我們却预先給出这个精确度，并且相反地問：为了达到这个給出的精确度应当选取多大的数 x 。由于問題提法的不同，相应地它的答案也有另外的特点；特别是，对于齐次和非齐次情况我們得到了本质上不同的結果。

在齐次方程情况下 ($\beta=0$)，所提出的問題得到很簡單的解。

定理 25 对 于 无 論 怎 样 的 实 数 $n \geq 1$ 和 α ，能 找 到 整 数 x, y ，满 足 不 等 式

$$0 < x \leq n, \quad |ax - y| < \frac{1}{n}.$$

証明 如果 α 是有理的， $\alpha = \frac{a}{b}$ 和 $0 < b \leq n$ ，則当設 $x = b, y = a$ 后定理显然得証；如果 α 不能表示成这样的形式，即如果 α 是无理数，或者是分母大于 n 的有理分数，則由关系式

$$q_k \leq n < q_{k+1}$$

（这里我們用 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示数 α 的漸近分数）确定 k 后，我們有：

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k n},$$

因而

$$|aq_k - p_k| < \frac{1}{n}, \quad 0 < q_k \leq n,$$

这就証明了定理。

現在我們自然应当提出关于在非齐次方程 (37) 情况下是否可以建立这样的逼近度的問題。換句話說，能否断定，对于任意无理数 α 可找到这样的正数 C ，使对无論怎样的数 $n \geq 1$ 和 β ，存在整数 x 和 y ，满足不等式：

$$0 < x \leq Cn, \quad |ax - y - \beta| < \frac{1}{n}?$$

（显然，这时我們所要求的比在齐次情况时所証明的更少，因为

允許 C 依赖于 α , 可是在齐次情况下 $C=1$ 是绝对常数.) 不难引入与这样命题的可能性相矛盾的一些先驗想法; 首先, 对于有理数 α , 它显然不正确, 因为在这种情况下, 象我們上面看見了的那样, 一般地说(即在任意 β 时), 量 $|\alpha x - y - \beta|$ 不能够成为任意小; 还可以預料到这种情况: 如果 α 是无理的, 但有理分数非常地逼近它, 則根据定理 24 量 $|\alpha x - y - \beta|$ 可以任意小, 然而在适当选取 β 和給定精确度时, 为此要求 x 和 y 有比較大的值. 这些想法允許进一步假设, 差 $\alpha x - y$ 逼近于任意实数 β , 比有理分数逼近数 α 更容易达到, 即比量 $\alpha x - y$ 逼近于 0 更容易达到; 象我們知道的那样, 同样地要求数 α 的元素不过快地增长.

所有这些想法的論証和准确的数量表示式, 都具体表现在下面的命题中.

定理 26 为了保証存在正数 C , 它具有这样的性质: 使得对任意实数 $n \geq 1$ 和 β 都能找到满足不等式

$$x \leq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}$$

的整数对 x 和 y ($x > 0$), 其必要且充分的条件是 α 是无理数, 而且它能表成具有有界元素的連分数.

証明 設

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots],$$

且設 $a_i < M$ ($i=1, 2, \dots$). 其次, 設 $m \geq 1$ 和 β 是任意实数. 以 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示数 α 的漸近分数, 由不等式

$$q_k \leq m < q_{k+1}$$

确定 k ; 則

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{mq_k},$$

或

$$\alpha = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\delta}{mq_k} \quad (|\delta| \leq 1). \quad (41)$$

其次我們选取整数 t , 使

$$|\beta q_k - t| \leq \frac{1}{2},$$

由此

$$\beta = \frac{t}{q_k} + \frac{\delta'}{2q_k} \quad (|\delta'| \leq 1). \quad (42)$$

最后, 象在定理 24 的証明时那样, 我們找到满足关系式

$$xp_k - yq_k = t, \quad 0 < x \leq q_k \quad (43)$$

的整数对 x, y .

由 (41)、(42) 和 (43) 推得:

$$\begin{aligned} |\alpha x - y - \beta| &= \left| \frac{xp_k}{q_k} - y - \frac{t}{q_k} + \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k} \right| \\ &= \left| \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k} \right| < \frac{x}{mq_k} + \frac{1}{2q_k} \\ &\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{2q_{k+1}} \left(\frac{q_{k+1}}{q_k} \right) < \frac{1}{m} + \frac{1}{2m} (a_{k+1} + 1) \\ &< \frac{1}{m} + \frac{M+1}{2m} = \frac{M+3}{2m}. \end{aligned}$$

到現在为止, 数 $m \geq 1$ 仍然是完全任意的; 如果現在在給定的 $n \geq 1$ 时, 假設 $m = \frac{M+3}{2} n$ 則显然有 $m > 1$, 因而, 根据前面所指出的方法选取数 x 和 y :

$$0 < x \leq q_k \leq m = \frac{M+3}{2} n,$$

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

定理的第一部分得証.

为了証明第二部分, 我們假設在数 α 的元素 a_k 中可遇到任意大的数. 在这样的情况下, 象証明定理 23 时那样, 对无论多么小的正数 ε , 可找到整数 $q > 0$ 和 p 满足不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon^2}{q^2},$$

由此

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta \varepsilon^2}{q^2} \quad (|\delta| < 1).$$

現在我們設 $n = \frac{q}{\varepsilon}$ 和 $\beta = \frac{1}{2q}$; 則對任意整數 $x, y (0 < x \leq Cn)$, 我們有:

$$\begin{aligned} |\alpha x - y - \beta| &= \left| \frac{xp}{q} - y - \frac{1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2} \right| \\ &= \left| \frac{2(xp - yq) - 1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2} \right| \\ &> \frac{2(xp - yq) - 1}{2q} - \frac{x\varepsilon^2}{q^2} \geq \frac{1}{2q} - \frac{C\varepsilon}{q} \\ &= \frac{1 - 2C\varepsilon}{2q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

但無論 C 多么大, 對於充分小的 ε , 我們有 $\frac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} > 1$, 因而對任意整數 $x, y (0 < x \leq Cn)$

$$|\alpha x - y - \beta| > \frac{1}{n},$$

定理的第二部分得證。

我們來總結我們所得到的結果。在研究方程(37)的整數近似解時, 我們把對任意 $n \geq 1$ 在整數 $x < Cn$ (這裡 C 是常數, 它可能依賴於 α) 時可以達到用量 $\frac{1}{n}$ 表示的精確度的這種情況作為“正規”情況。齊次(即在 $\beta = 0$ 時所得到的)方程總允許正規的解(定理 25)。定理 26 表明, 一般的(非齊次的)方程允許正規的解當且僅當, 如果相應的齊次方程沒有“非正規的”解, 即如果在任意 $\varepsilon > 0$ 和適當选取 n 時相應的齊次方程不能用整數 $x > 0$ 和 $y (x < \varepsilon n)$ 達到 $\frac{1}{n}$ 的精確度。由這個觀點, 我們所得到的結果可以作為綫性方程(代數的、積分的等等)的解的一般規律的變形: 在一般情況下非齊次方程有“正規”解, 如果相應的齊次方程不允許“非正規”解。

還要指出, 在定理 26 中我們會要求 C 不依賴於 β ; 可以允許

C 是 β 的函數, 其結果仍正確, 只是證明 (在它的第二部分) 稍複雜一些。

§9 代數無理數的逼近法. 柳維爾 (Liouville) 超越數

設

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (44)$$

是具有整數系數 a_0, a_1, \dots, a_n 的 n 次多項式; 這種多項式的根 α 稱為代數數。因為任何有理數 $\alpha = \frac{a}{b}$ 可以看作是一次方程 $bx - a = 0$ 的根, 所以代數數的概念顯然是有理數概念的自然而然的推廣。如果給定的代數數滿足 n 次方程 $f(x) = 0$ 而不滿足更低次的任何方程 (具有整數系數的), 則稱它為 n 次代數數; 特別是, 有理數可以看作是一次代數數; 數 $\sqrt{2}$, 因為它是多項式 $x^2 - 2$ 的根, 所以是二次代數數, 或稱為二次無理數; 用類似的方法可定義三次的、四次的無理數等等。一切非代數數稱為超越數; 例如, 數 e 和 π 屬於後一種數。由於代數數在現代數論中起着重大的作用, 所以在用有理分數來逼近它們的問題上作了很多重要的研究。在這方面第一個重要的結果是下面的所謂柳維爾定理。

定理 27 對於任何 n 次的實數無理代數數 α , 存在這樣的正數 C , 使在任意整數 p 和 $q (q > 0)$ 情況下

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n}.$$

證明 設 α 是多項式 (44) 的根。由代數學知道, 我們可以改寫成:

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x), \quad (45)$$

這裡 $f_1(x)$ 是 $n-1$ 次多項式; 此時容易看到 $f_1(\alpha) \neq 0$; 事實上, 在 $f_1(\alpha) = 0$ 時多項式 $f_1(x)$ 被 $x - \alpha$ 除盡, 而這意味著多項式 $f(x)$ 能被 $(x - \alpha)^2$ 除盡; 但在這樣的情況下, 導數多項式 $f'(x)$ 能被 $x - \alpha$ 除盡, 即我們有 $f'(\alpha) = 0$, 這是不可能的, 因為 $f'(x)$ 是具有整系數

的 $n-1$ 次多项式, 而 α 是 n 次代数数. 因而, 我们有:

$$f_1(\alpha) \neq 0,$$

于是, 可以找到这样的正数 δ , 使

$$f_1(x) \neq 0 \quad (\alpha - \delta \leq x \leq \alpha + \delta).$$

设 p 和 q ($q > 0$) 是任意整数对; 如果 $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \delta$, 则 $f_1\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, 因此在等式(45)中代入 $x = \frac{p}{q}$ 后, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} - \alpha &= \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{a_0 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + \cdots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)} \\ &= \frac{a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n}{q^n f_1\left(\frac{p}{q}\right)}. \end{aligned}$$

最后分数的分子是整数而且不等于 0, 因为否则我们就有 $\alpha = \frac{p}{q}$, 可是按定理的条件 α 是无理数. 因而, 分子按绝对值至少等于 1; 用 M 表示函数 $f_1(x)$ 在区间 $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ 上的上界, 因此我们由最后的等式得到:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{M q^n}.$$

如果

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \delta,$$

我们更应有

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{\delta}{q^n};$$

因此, 若用 C 表示比 δ 和 $\frac{1}{M}$ 更小的任意正数, 则我们在所有的情形下(即对任意整数 $q > 0, p$)有:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n},$$

由此证明了定理 27.

显然, 柳維尔定理断定: 代数数不允許用有理分數来作这样的逼近, 使其精确度超过主要依赖于所給代数数次數的某一确定的阶. 这个定理的主要历史意义在于, 它第一次使証明超越数的存在和作出这种数的具体例子成为可能. 象我們所看到的那样, 为此, 我們只須作出一个无理数, 使有理分數可以非常地逼近它, 而在这方面, 我們由定理 22 已知, 构造这种数的可能性没有任何限制.

定理 27 具体地指出, 如果对于任意 $C > 0$ 和任意自然数 n , 存在满足不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^n} \quad (46)$$

的整数 p 和 q ($q > 0$), 則数 α 是超越数. 但借助于連分數工具很容易作出任意多这样的数. 为此, 在选取元素 a_0, a_1, \dots, a_k 后, 作漸近分數 $\frac{p_k}{q_k}$ 并且取

$$a_{k+1} > q_k^{k-1},$$

因为那时

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}},$$

因此, 不等式 (46) 对无论怎样的 $C > 0$ 和自然数 n 在一切充分大的 k 值时被滿足.

§ 10 二次无理数和循环連分數

对于二次无理数 α 定理 27 表明, 存在这样的 (依赖于 α 的) 正数 C , 使不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2}$$

沒有整数解 p 和 q ($q > 0$). 据定理 23 由此又推得, 任何二次无理数的元素都有界. 然而, 远在柳維尔以前, 对于二次无理数, 拉格朗日 (Lagrange) 已找到了表示它們的連分數所特有的更丰富的性

质、原来,二次无理数的元素序列总是循环的,反之,任何循环连分数表示着某一个二次无理数.这个命题的证明在本节给出.

我們約定,称連分数

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

是循环的,如果存在这样的正整数 k_0 和 h , 使对于任意 $k \geq k_0$ 有

$$a_{k+h} = a_k;$$

类似于十进小数我們將用下述方法表示这样的循环分数:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \dots, a_{k_0+h-1}}]. \quad (47)$$

定理 28 任何循环連分数表示二次无理数,反之,任何二次无理数用循环連分数来表示.

証明 第一个論断用几句话就可以証明. 事实上,很显然,循环連分数(47)的余数满足关系式:

$$r_{k+h} = r_k \quad (k \geq k_0).$$

根据第一章公式(16),对于 $k \geq k_0$ 我們有:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h} + q_{k+h-2}} \\ &= \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}, \end{aligned} \quad (48)$$

由此

$$\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}};$$

因而,数 r_k 满足具有整数系数的二次方程,所以它是二次无理数;但在这样的情况下,等式(48)之第一式指出 α 是二次无理数.

相反論断的証明較复杂. 設数 α 满足具有整数系数的二次方程:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0. \quad (49)$$

以表达式

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}$$

代入(49)式,用 n 表示余数的阶,我們看到, r_n 满足方程

$$A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0, \quad (50)$$

这里 A_n, B_n, C_n 是用公式:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

确定的整数. 特别是, 由此推得

$$C_n = A_{n-1}. \quad (52)$$

借助于这些公式容易直接验证,

$$\begin{aligned} B_n^2 - 4A_nC_n &= (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})^2 \\ &= b^2 - 4ac, \end{aligned} \quad (53)$$

即方程(50)的判别式对于所有 n 都等于方程(49)的判别式.

其次, 因为

$$\left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q_{n-1}^2},$$

所以

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \quad (|\delta_{n-1}| < 1);$$

因此由公式(51)中第一式得到:

$$\begin{aligned} A_n &= a \left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \right)^2 + b \left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \right) q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ &= (a\alpha^2 + b\alpha + c)q_{n-1}^2 + 2a\alpha\delta_{n-1} + \frac{a\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}, \end{aligned}$$

由此据方程(49)

$$|A_n| = \left| 2a\alpha\delta_{n-1} + a \frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1} \right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|,$$

其次根据等式(52)

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|.$$

因而, 方程(50)的系数 A_n 和 C_n 的绝对值有界, 于是, 在 n 变化时, A_n 和 C_n 只能取有限个不同的值. 据等式(53)由此推得, B_n 也只能取有限个不同的值.

所以, 在 n 从 1 增加到 ∞ 时, 我們只能遇到有限个不同的方程(50); 但在这样的情况下, r_n 只能取有限个不同的值, 因此对于适当选取的 k 和 h

$$r_k = r_{k+h};$$

这說明, 表示 α 的连分数是循环的. 我們論断的第二部分于是得到証明.

对于更高次的代数无理数, 我們还不知道描述它們的连分数有任何类似于在此所証明了的性质. 一般地, 关于用有理分数逼近于高次代数无理数, 都限于柳維尔定理和它的某些更新的更强的命題的初等推論. 有趣的是, 到現時还不知道任何一个高于二次的代数数的连分数分解式. 不知道这样的分解式是否可能为有界元素序列; 相反地, 也不知道它是否可以具有无界的元素序列等等. 一般說来, 与高于二次的代数数分解成连分数相联系的問題非常困难并且几乎还没有研究过.

第三章 連分数的度量理論

§11 引言

从以上各章我們看到，实数按照其算术性质說来可能有很大的差別。除了可把实数分为有理数和无理数或分为代数数和超越数之外，还可能有许多更細致的分类法，按照一系列算术性质的特征，首先是按照逼近实数的有理分数的近似特征来分类。在所有情况下，我們直到現在还只是满足于简单的断定：具有这种或那种算术性质的数，是实际上存在的。例如，我們知道，存在这样的数，它的有理分数 $\frac{p}{q}$ 表示式的精确程度只能是这样：其阶数不超过 $\frac{1}{q^2}$ (例如，所有二次无理数)；但我們也知道，还存在这样的数，对它可作更高阶的逼近(第二章定理 22)。很自然地，我們产生这种問題，我們应当认为这两种相反的性质哪一种更“普遍”、两种类型的实数中哪一种更常見呢？

如果我們希望按这种方式提出的問題的措詞更确切些，我們就应当注意到，每当我們談到实数的任何性质(例如，无理性，超越性，或元素数列为有界等等)时，全部实数的集合就按此性质分为两个集合：1) 具有所給性质的数的集合，和 2) 不具有此性质的数的集合。显然，我們想提的問題，归結为按照确定目的来比較此二集合的問題，到底哪一个集合的数多些，哪一个集合的数少些。但是实数集合可用不同的观点按不同的特征来作相互对比；可以提出关于它們的势，或测度，或一系列其他度量的問題；無論就方法或結果而言，最有趣味的是度量問題，它研究具有給定性质的数集的测度。一种学說，称为算术連續統的度量理論，在最近得到巨

大的发展,并且已經得到了許多簡單而有趣的規律性。而在无理性质算术性质的一切研究中,連分数是一个自然的和最好的研究工具;但为了使它成为算术度量工具,也就是說,为了用它来研究具有某种算术性质的数集的测度,显然,我們首先应当对此工具本身作詳細而全面的度量分析——換句話說,应当学会确定这样的数集的测度,此集中任何一数的連分数展开式具有預先給定的性质。这类問題可能具有十分不同的特征;我們可以探求这种数的集合的测度,其連分数展开式中 $a_4=2$, 或 $q_{10}<1000$, 或其元素为有界数列,或在其元素中没有偶数等等,諸如此类。解决这类問題的方法的总和,形成連分数的度量理論,本章將敘述此理論的基础及其初步应用。因为对所給实数加上任意整数不改变它的基本算术性质,所以我們以后只考虑在 0 与 1 之間的实数(即处处假設 $a_0=0$)。对于度量理論,如果我們希望集合的测度在一般情況下不成为无穷大的話,区間为有限这一限制終究是必要的。

我們假定讀者已熟知集合的綫性测度理論的基本定理^①。

§ 12 將連分数的元素作为它所表示的数的函数

任何实数 α 可唯一地表成連分数

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots];$$

因此每个元素 a_n 均由此給定的数 α 单值确定,即它是 α 的单值函数:

$$a_n = a_n(\alpha).$$

在連分数度量理論的构造中,第一步应当是此函数性质的研究,我們將对这类函数的变化过程形成一个一般的概念。这就是本节的任务。

① 对于了解本章來說,更充分的知識見于 П. С. 亚历山大洛夫 (Александров) 和 А. Н. 哥尔莫哥洛夫 (Голосов) 所著“实变函数論初步 (Введение в теорию функций действительного переменного)”, ГИИ. 1933, 第三章。——辛欽注

我們已在 § 11 中指出, 我們处处設 $a_0=0$; 为了书写簡便我們在这种情况下, 將

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

簡写为

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots],$$

也就是认为

$$[a_1, a_2, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

首先將第一个元素 a_1 作为 α 的函数来研究. 因为

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots},$$

所以, 显然有 $a_1 = \left[\frac{1}{\alpha} \right]$, 即 a_1 是不超过 $\frac{1}{\alpha}$ 的最大整数. 因此,

$$a_1 = 1 \quad \text{对于 } 1 \leq \frac{1}{\alpha} < 2 \text{ 成立, 即 } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1,$$

$$a_1 = 2 \quad \text{对于 } 2 \leq \frac{1}{\alpha} < 3 \text{ 成立, 即 } \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

$$a_1 = 3 \quad \text{对于 } 3 \leq \frac{1}{\alpha} < 4 \text{ 成立, 即 } \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{3}, \text{ 等等.}$$

一般說来,

$$a_1 = k \quad \text{对于 } k \leq \frac{1}{\alpha} < k+1 \text{ 成立, 即 } \frac{1}{k+1} < \alpha \leq \frac{1}{k}.$$

因此在 $\frac{1}{\alpha}$ 取整数值时, 函数 $a_1 = a_1(\alpha)$ 发生間断, 又当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 函数 $a_1(\alpha)$ 无限制地增大. 由图 1 可見它的图象.

还要指出, a_1 在每一个这样的区間 $\left(\frac{1}{k+1} < \alpha \leq \frac{1}{k} \right)$ 中保持为常量, 这些区間我們称之为一級区間, 而

$$\int_0^1 a_1(\alpha) d\alpha = +\infty,$$

因为此积分显然等价于发散級数

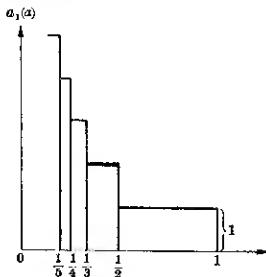


图 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}.$$

現在來研究函數 $a_2(\alpha)$. 依此目的首先考慮任何一個一級不變區間

$$\frac{1}{k+1} < \alpha \leq \frac{1}{k}.$$

在此區間中 $a_1 = k$ 處處成立, 因此

$$\alpha = \frac{1}{k + \frac{1}{r_2}},$$

並且 $1 \leq r_2 < \infty$ 和 $a_2 = [r_2]$. 隨着 r_2 從 1 趨向 ∞ , α 由 $\frac{1}{k+1}$ 趨向 $\frac{1}{k}$, 因此, 它跑過所給的一級區間. 這時, 顯然有

$$a_2 = 1 \quad \text{當 } 1 \leq r_2 < 2, \text{ 即 } \frac{1}{k+1} \leq \alpha < \frac{1}{k + \frac{1}{2}},$$

$$a_2 = 2 \quad \text{當 } 2 \leq r_2 < 3, \text{ 即 } \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \leq \alpha < \frac{1}{k + \frac{1}{3}},$$

$$a_2 = 3 \quad \text{當 } 3 \leq r_2 < 4, \text{ 即 } \frac{1}{k + \frac{1}{3}} \leq \alpha < \frac{1}{k + \frac{1}{4}},$$

一般地

$$a_2 = l \quad \text{当 } l \leq r_2 < l+1, \text{ 即 } \frac{1}{k + \frac{1}{l}} \leq \alpha < \frac{1}{k + \frac{1}{l+1}}.$$

因此, 在我們选定的一級区間中, 函数 $a_2(\alpha)$ 的图象表示如图 2 所示.

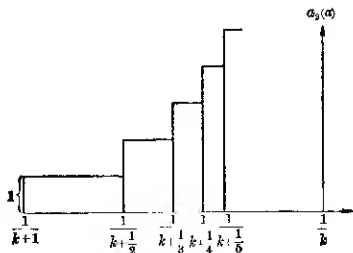


图 2

函数 $a_2(\alpha)$ 在每一个区間

$$\left(\frac{1}{k + \frac{1}{l}}, \frac{1}{k + \frac{1}{l+1}} \right)$$

中保持为常量, 我們称这些区間为二級区間; 因此, 每个一級区間都被分解为可数个二級区間, 它們由左向右排列 (注意, 一級区間所形成的序列是由右向左排列的). 使 $a_1 = k$ 的 α 值的集合是一个一級区間; 使 $a_2 = l$ 的点集, 却是可数个二級区間 (每一个这种二級区間属于某一个一級区間). 每一个一級区間由条件 $a_1 = k$ 决定; 每一个二級区間由条件 $a_1 = k$ 及 $a_2 = l$ 决定.

一般地假設我們已經对 n 級区間下了定义, 又对函数 $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, \dots , $a_n(\alpha)$ 作了研究. 每一組值

$$a_1 = k_1, a_2 = k_2, \dots, a_n = k_n \quad (54)$$

决定某一个 n 級区間 J_n . 为了研究函数 $a_{n+1}(\alpha)$ 在区間 J_n 中的

动态,我們指出,在此区間中的任何数 α 可以表为

$$\alpha = [k_1, k_2, \dots, k_n, r_{n+1}], \quad (55)$$

这里 r_{n+1} 取从 1 到 ∞ 之間的一切可能值. 反之,对任何 $r_{n+1} (1 < r_{n+1} < \infty)$, 表示式 (55) 給了我们一个数 α , 它满足条件 (54), 所以它属于区間 J_n ; 因为 $a_{n+1} = [r_{n+1}]$, 所以我們看出, 在每个 n 級区間內, $a_{n+1}(\alpha)$ 取从 1 到 ∞ 之間的一切整数值. 为了构成更精确的图象, 象通常一样, 約定以 $\frac{p_n}{q_n}$ 表示数 α 的漸近分数. 这时

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}},$$

并且, 当 α 跑过所給区間 J_n 时, r_{n+1} 由 1 增加到 ∞ , 而 $p_n, q_n, p_{n-1}, q_{n-1}$ 保持为常量, 因为它们由数 a_1, a_2, \dots, a_n 完全决定, 而 a_1, a_2, \dots, a_n 在 J_n 中不变. 特別是設 $r_{n+1} = 1$ 和当 $r_{n+1} \rightarrow \infty$, 我們得到区間 J_n 的两端点

$$\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \text{ 和 } \frac{p_n}{q_n};$$

因为

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n (q_n r_{n+1} + q_{n-1})},$$

这样, α 是 r_{n+1} 在区間 $(1, \infty)$ 內的单调函数; 所以, 反过来, r_{n+1} 和 a_{n+1} 是 α 在区間

$$J_n = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right)$$

中的单调函数; 这样一来, 当 α 跑过区間 J_n , $a_{n+1}(\alpha)$ 依次取值 1, 2, 3, \dots , 从而将区間 J_n 分成可数个 $n+1$ 級区間. 这区間序列当 n 为偶数时从右向左排列, 当 n 为奇数时从左向右排列^①.

这样一来, 函数 $a_n(\alpha)$ 的构造, 至少从其性质方面說来, 已完

① $\because n$ 为偶数, 則 $\alpha - \frac{p_n}{q_n} > 0$, \therefore 当 r_{n+1} 增大, 則 $\alpha - \frac{p_n}{q_n}$ 减小, 即 α 是 r_{n+1} 的减函数, $\therefore r_{n+1}$ 和 a_{n+1} 是 α 的减函数. ——譯名注

全闡明了。再約定將區間 $(0, 1)$ 称为零級區間 (它是唯一的), 我們首先用更小的區間的序列把它依次地盖起来, 把 $n+1$ 級區間序列安放在已經作出的 n 級區間上; 当 n 为偶数时, 此序列由右向左分布, 当 n 为奇数时, 它由左向右分布。函数 $a_{n+1}(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 在每个 $n+1$ 級區間上保持为常量; 它在每一个 n 級區間上是單調函数并且取从 1 到 ∞ 之間的一切整数值。每一組值

$$a_1 = k_1, \quad a_2 = k_2, \quad \dots, \quad a_n = k_n$$

对应于一个唯一确定的 n 級區間, 反之亦然。一般說来, 更普遍的組

$$a_{m_1} = k_1, \quad a_{m_2} = k_2, \quad \dots, \quad a_{m_s} = k_s$$

和由區間构成的可数集合相对应。

对連分数度量理論自然会提出的第一个問題是, 如何确定在 $(0, 1)$ 區間內所有 $a_n = k$ 的点集的測度^①; 我們已經知道此集合总是由區間組成的系統 (區間系); 因此, 問題是关于这些區間长度的总和的确定。这个問題在第一次近似范圍內很容易解决。

我們約定在以后用

$$E \left(\begin{matrix} n_1, n_2, \dots, n_s \\ k_1, k_2, \dots, k_s \end{matrix} \right)$$

来表示在區間 $(0, 1)$ 內滿足

$$a_{n_1} = k_1, \quad a_{n_2} = k_2, \quad \dots, \quad a_{n_s} = k_s$$

的点集; 在这里, 所有 n_i 和 k_i 都是自然数, 并且一切 n_i 都是互不相同的。我們已經知道这种集合总是區間系。其中, 我們已知集合

$$E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \end{matrix} \right)$$

是由关系式

$$a_i = k_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

所描述的 n 級區間。

^① 指在此点所表实数的連分数展开式中 $a_n = k$, 以下同此。——譯者注

顯然,我們處處有:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^{\infty} E \left(\begin{matrix} n_1, \dots, n_{l-1}, n_l, n_{l+1}, \dots, n_s \\ k_1, \dots, k_{l-1}, k_l, k_{l+1}, \dots, k_s \end{matrix} \right) \\ = E \left(\begin{matrix} n_1, \dots, n_{l-1}, n_{l+1}, \dots, n_s \\ k_1, \dots, k_{l-1}, k_{l+1}, \dots, k_s \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

最後,我們約定以 mE 來表示集合 E 的測度.

現在考慮任意的 n 級區間

$$J_n = E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \end{matrix} \right)$$

和包含在其中的 $n+1$ 級區間

$$J_{n+1}^{(s)} = E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, n, n+1 \\ k_1, k_2, \dots, k_n, s \end{matrix} \right).$$

我們已經知道,區間 J_n 的端點是

$$\frac{p_n}{q_n} \text{ 和 } \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}},$$

在此,一般用 $\frac{p_k}{q_k}$ 來表示連分數

$$[k_1, k_2, \dots, k_n]$$

的 k 階漸近分數. 從另一方面來看,對於區間 $J_{n+1}^{(s)}$ 中的一切點我們有

$$a_{n+1} = [r_{n+1}] = s,$$

所以

$$s \leq r_{n+1} < s+1.$$

這樣,在區間 J_n 的所有點

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

中間,凡是 $s \leq r_{n+1} < s+1$ 的點都屬於區間 $J_{n+1}^{(s)}$, 由此可得特例,即區間 $J_{n+1}^{(s)}$ 的端點是

$$\frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} \text{ 和 } \frac{p_n (s+1) + p_{n-1}}{q_n (s+1) + q_{n-1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}J_n &= \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}, \\ \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} &= \left| \frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} - \frac{p_n(s+1) + p_{n-1}}{q_n(s+1) + q_{n-1}} \right| \\ &= \frac{1}{[q_n s + q_{n-1}][q_n(s+1) + q_{n-1}]} \\ &= \left| \frac{1}{q_n^2 s^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right) \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)} \right|,\end{aligned}$$

所以,

$$\frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} = \frac{1}{s^2} \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right) \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)};$$

这里右端第二个因子显然处处小于2, 大于 $\frac{1}{3}$ (后者是因为

$$\frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}} \geq 1 \text{ 和 } 1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n} < 3); \text{ 因此我們得到:}$$

$$\frac{1}{3s^2} < \frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} < \frac{2}{s^2}. \quad (57)$$

这就說明, 在任何 n 級区間中由值 $a_{n+1} = s$ 所刻划的 $n+1$ 級区間, 占所給 n 級区間的 $\frac{1}{s^2}$ 阶的部分. 最重要的是, 由不等式 (57) 所建立的界限不仅完全不依赖于数 k_1, k_2, \dots, k_n , 而且也不依赖于阶数 n , 仅仅由数 s 决定. 将这些不等式改写为

$$\frac{\mathfrak{M}J_n}{3s^2} < \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} < \frac{2\mathfrak{M}J_n}{s^2},$$

按一切 n 級区間 J_n 求和 (換句話說, 按 k_1, k_2, \dots, k_n 从 1 到 ∞ 間的一切值求和), 最后, 注意到

$$\sum \mathfrak{M} J_n = 1 \text{ 和 } \sum \mathfrak{M} J_{n+1}^{(s)} = \mathfrak{M} E \binom{n+1}{s},$$

我們得到:

$$\frac{1}{3s^2} < \mathfrak{M} E \binom{n+1}{s} < \frac{2}{s^2},$$

它在第一次近似的程度上解决了我們提出的問題。我們看到, 某个确定元素取所給值 s 的点集, 它的测度总是介于 $\frac{1}{3s^2}$ 与 $\frac{2}{s^2}$ 之間 (因此, 它是 $\frac{1}{s^2}$ 阶的量)。

§ 13 元素增长的度量性估计

我們現在已經有充分的資料来解决这种点集的测度問題, 它的每个点所对应的連分数展开式中无穷个元素都必須符合規定条件。作为第一个例子我們来証明以下的簡單命題。

定理 29 在区間 $(0, 1)$ 中, 元素为有界的点集测度为零。

証明 以 E_M 表示区間 $(0, 1)$ 中的这种点集, 它的点的对应元素^①均小于 M 。設 J_n 是任取的 n 級区間, 而且它的点满足条件

$$a_i < M \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (58)$$

对于 J_n 中满足补充条件 $a_{n+1} = k$ 的点所形成的 $n+1$ 級区間, 用 $J_{n+1}^{(k)}$ 来表示。根据不等式 (57) 之第一式, 得

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3k^2} \mathfrak{M} J_n,$$

因此

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \sum_{k \geq M} J_{n+1}^{(k)} &> \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{k \geq M} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(M+i)^2} \\ &> \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \int_{M+1}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3(M+1)} \mathfrak{M} J_n, \end{aligned}$$

又因为

① 指此点所代表的数的連分数展开式的元素。——譯者注

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} = J_n,$$

所以

$$\mathfrak{M} \sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} < \left\{ 1 - \frac{1}{3(M+1)} \right\} \mathfrak{M} J_n = \tau \mathfrak{M} J_n, \quad (59)$$

在此,令

$$\tau = 1 - \frac{1}{3(M+1)},$$

并且当 $M > 0$, 显然有 $\tau < 1$ ①.

以 $E_M^{(n)}$ 表示区間 $(0, 1)$ 內满足条件(58)的点集, 我們由不等式(59)可見, 任何 n 級区間 $J_n^{(i)}$ 与 $E_M^{(n+1)}$ 的交集的测度小于 $\tau \mathfrak{M} J_n$; 显然, 因为不属于 $E_M^{(n)}$ [即不满足条件(58)] 的 n 級区間不可能包含集合 $E_M^{(n+1)}$ 的任何一点, 所以将不等式(59)按一切属于 $E_M^{(n)}$ 的 n 級区間求和, 我們得到:

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau \mathfrak{M} E_M^{(n)}; \quad (60)$$

繼續应用此不等式, 显然, 我們得到

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau^n \mathfrak{M} E_M^{(1)} \quad (n \geq 1),$$

因为 $0 < \tau < 1$, 所以

$$\mathfrak{M} E_M^{(n)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

但是按照集合 E_M 的定义, 显然它包含在每一个集合 $E_M^{(n)}$ 之中, 所以

$$\mathfrak{M} E_M = 0 \text{ ②.}$$

現在設

$$\sum_{M=1}^{\infty} E_M = E,$$

我們有

① 由 $a_1 > 0$ 可見 $M > 0$ 一定成立. ——譯者注

② 根据实变函数論中的定理: $\because E_M^{(1)} \supset E_M^{(2)} \supset \dots \supset E_M^{(n)} \supset E_M^{(n+1)} \dots$

又,

$$E_M^{(i)} \supset E_M \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M} E_M^{(n)} = \mathfrak{M} E_M. \quad \text{——譯者注}$$

$$\mathfrak{M} E < \sum_{M=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_M = 0.$$

但是,具有有界元素的数,当 M 充分大时,它必属于集合 E_M , 故此数也属于集合 E , 定理由此得证.

我們知道(第二章定理 23),具有有界元素的数 α ,若用有理分数来逼近它,则其近似程度不会比如下规律

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2} \quad (61)$$

更好(所有二次无理数就是这种数). 我們現在看到所有这种数仅仅构成测度为零的集合; 換句話說,几乎所有(即除去测度为零的集合外)的数都可能用有理分数作更好的逼近. 显然,近似法的度量理論的基本问题是: 允許用有理分数作这种或那种程度的近似的数集,具有何种测度? 特别是,对几乎所有的数(即除去测度为零的集合外)什么近似规律是最好的; 換句話說,如果我們約定略去测度为零的数集 α , 則在此範圍內由不等式(61)所建立的规律还可能得到进一步的改善.

在下一节中我們再来解决这个問題; 这里我們还是先来証明如下的命题.

定理 30 設 $\varphi(n)$ 是自然变数 n 的任何正值函数; 如果級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ 发散, 則不等式

$$a_n \cdot \alpha_n(\alpha) \geq \varphi(n) \quad (62)$$

对于几乎一切 α 值都成立无限多次; 反之, 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ 收敛, 則对于几乎一切数 α , 不等式(62)成立的次数为有限次.

預先指出, 特别是, 設 $\varphi(n)$ 恒等于正的常数 M , 我們从定理 30 可以断定, 用来証明定理 29 的集合 E_M 是零测度的集合. 这样, 定理 29 可以看作是定理 30 的一个最简单的特例.

証明 定理的第一个論断的証明完全类似于定理 29 的. 設 J_{m+n} 是 $m+n$ 級区間, 而且它的点都满足条件

$$a_{m+i} < \varphi(m+i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (63)$$

(对于 a_1, a_2, \dots, a_m 我們不附加任何条件). 保留在証明定理 29 时引入的記号, 我們得到类似于不等式(59)的結果:

$$\mathfrak{M} \sum_{k < \varphi(m+n+1)} J_{m+n+1}^{(k)} < \left\{ 1 - \frac{1}{3[1 + \varphi(m+n+1)]} \right\} \mathfrak{M} J_{m+n}.$$

将此不等式按一切满足条件(63)的 $m+n$ 級区間求和, 又将区間 $(0, 1)$ 中满足这些条件的数集記作 $E_{m,n}$, 我們得到

$$\mathfrak{M} E_{m,n+1} < \left\{ 1 - \frac{1}{3[1 + \varphi(m+n+1)]} \right\} \mathfrak{M} E_{m,n};$$

繼續应用此不等式, 得到

$$\mathfrak{M} E_{m,n} < \mathfrak{M} E_{m,1} \prod_{i=2}^n \left\{ 1 - \frac{1}{3[1 + \varphi(m+i)]} \right\}.$$

如果級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ 发散, 則級数

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3[1 + \varphi(m+i)]}$$

不論 m 取何值, 显然也发散, 而根据无穷乘积的理論, 由此可得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\prod_{i=2}^n \left\{ 1 - \frac{1}{3[1 + \varphi(m+i)]} \right\} \rightarrow 0.$$

因此, 对任何 m , 我們都有

$$\mathfrak{M} E_{m,n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

但是任何数 α , 若它滿足

$$a_{m+i} < \varphi(m+i) \quad (i=1, 2, \dots),$$

則它显然属于一切集合

$$E_{m,n} \quad (n=1, 2, \dots);$$

因此, 若我們把这样的数集記作 E_{∞} , 它的测度一定是零. 最后, 設

$$E_1 + E_2 + \dots + E_m + \dots = E,$$

我們看到, $\mathfrak{M} E = 0$; 但任何数 α , 如果它滿足不等式(62) 不超过

有限次,那么,很显然,对于充分大的 M , α 必属于集合 E_M , 所以, α 应当属于集合 E . 这就证明了定理的第一个断言.

现在假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ 收敛. 设 J_n 是一个 n 级区间, 而 $J_{n+1}^{(k)}$ 是此 J_n 中满足补充条件 $a_{n+1}=k$ 的 $n+1$ 级区间. 据不等式 (57) 之第二式, 我们得到

$$\mathfrak{M} J_{n+k}^{(k)} < \frac{2}{k^2} \mathfrak{M} J_n,$$

由此

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \sum_{k \geq \varphi(n+1)} J_{n+1}^{(k)} &< 2\mathfrak{M} J_n \sum_{k \geq \varphi(n+1)} \frac{1}{k^2} \leq 2\mathfrak{M} J_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\{\varphi(n+1)+i\}^2} \\ &< 2\mathfrak{M} J_n \left\{ \frac{1}{\varphi(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2} \right\} = \frac{4\mathfrak{M} J_n}{\varphi(n+1)}. \end{aligned}$$

以 F_n 表示区间 $(0, 1)$ 中满足 $a_n \geq \varphi(n)$ 的数集, 并按一切满足不等式的 n 级区间 J_n 求和, 又因为 $\sum \mathfrak{M} J_n = 1$ 我们得到

$$\mathfrak{M} F_{n+1} < \frac{4}{\varphi(n+1)}.$$

因此, 集合 $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ 的测度形成收敛级数. 以 F 表示区间 $(0, 1)$ 中的数集, 它的数属于无穷个集合 F_n , 所以^①

$$\mathfrak{M} F = 0.$$

① 在此似应加条件, 对于充分大的 n , 此式成立. 因为若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ 收敛, 则当 n 充分大, $\varphi(n) > 1$ 恒成立. 又 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{[\varphi(n+1)+i]^2} = \frac{1}{\varphi^2(n+1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[\varphi(n+1)+i]^2}$
 $< \frac{1}{\varphi^2(n+1)} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{[\varphi(n+1)+x]^2} = \frac{1}{\varphi^2(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2}$. 当 n 充分大, $\varphi(n+1) > 1$, $\therefore \frac{1}{\varphi^2(n+1)} < \frac{1}{\varphi(n+1)}$, $\therefore \frac{1}{\varphi^2(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2} < \frac{1}{\varphi(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2}$
 $= \frac{2}{\varphi(n+1)}$. ——译者注

② 这是集合的测度论中的已知定理; 可以这样证明, 因为不论 m 取何值, 集合 F 都属于集合 $\sum_{n=m}^{\infty} F_n$, 所以它的测度不会超过 $\sum_{n=m}^{\infty} \mathfrak{M} F_n$, 但当 m 充分大, $\sum_{n=m}^{\infty} \mathfrak{M} F_n$ 可任意小, $\therefore \mathfrak{M} F = 0$. ——辛欽法

但是 F 正是这种数的集合, 对于它來說不等式 (62) 滿足无限多次. 这样, 定理的第二断言也获得証明.

§ 14 漸近分数分母增长的度量性估計. 逼近的度量理論的基本定理

定理 31 存在着絕對常数 B , 它是正数, 且几乎处处对充分大的 n 有

$$q_n = q_n(\alpha) < e^{Bn}.$$

預先指出. 在第一章 § 4 中 (定理 12) 我們看到, 对于一切数 α 的漸近分数分母 q_n , 当 n 增加时, 它的增加不会慢于某个有絕對固定公比的几何級数. 定理 31 指出, 对于几乎一切数 α , 数 q_n 的增长不会快于另外一个有絕對固定公比的几何級数. 此定理还可以这样叙述: 存在着这样两个絕對常数 a 和 A ($1 < a < A$), 对于区間 $(0, 1)$ 内几乎一切数 α 当 n 充分大时有

$$a < \sqrt[n]{q_n} < A.$$

事实上, 更强得多的定理成立: 存在这样的絕對常数 r , 几乎处处有

$$\sqrt[n]{q_n} \rightarrow r \quad (n \rightarrow \infty);$$

可是此定理的証明要复杂得多, 而且在証明过程中要求更高深的輔助工具, 我們在 § 15 和 § 16 中将認識这工具. 可惜本书限于篇幅不允許載入此証明^①. 但为了我們最近的基本目的——証明定理 32——則关于定理 31 所叙述的数 q_n 的性质已經完全够了.

証明 以 $E_n(g)$ ($n > 0, g \geq 1$) 表示在区間 $(0, 1)$ 內滿足

$$a_1 a_2 \cdots a_n \geq g$$

① 辛欽于 1935 年証明了这个事实 (参看 “Zur metrischen Kettenbruchtheorie, Compositio Mathematica”, 卷 3, 1935, 2 期, 275~285). 不久, 法国数学家 P. Lévy 获得了常数 r 的明显表达式, 即 $\ln r = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}$ (参看 P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937, 320). ——格涅坚科注

的數集; 顯然, 此集合乃是 n 級區間的系統; 由 § 12 我們知道, 每一個這種區間的長度為

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)^2},$$

這是因為繼續使用明顯的不等式

$$q_n > a_n q_{n-1}$$

可得

$$q_n > a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1.$$

因此

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \sum_{a_1 a_2 \cdots a_n \geq g} \frac{1}{a_n^2 a_{n-1}^2 \cdots a_2^2 a_1^2}, \quad (64)$$

在此必須對滿足不等式 $a_1 a_2 \cdots a_n \geq g$ 的一切自然數 a_1, a_2, \dots, a_n 的組合求和。為了估計此和數, 注意到

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} &= \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{1}{a_i(a_i+1)} \leq 2^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i(a_i+1)} \\ &= 2^n \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{dx_i}{x_i^2} = 2^n \int_{a_1}^{a_1+1} \int_{a_2}^{a_2+1} \cdots \int_{a_n}^{a_n+1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2}, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{a_1 a_2 \cdots a_n \geq g} \left\{ \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right\} \leq 2^n J_n(g),$$

在此 $J_n(g)$ 是展布在區域

$$x_i \geq 1 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq g$$

上的 n 重積分

$$\int \cdots \int \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2}.$$

當 $g \leq 1$, 顯然此區域成為 $1 \leq x_i < \infty$ ($i=1, 2, \dots, n$), 我們得到:

$$J_n(g) = \left\{ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \right\}^n = 1 \quad (g \leq 1), \quad (65)$$

現在指出, 当 $g > 1$ 时

$$J_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ln g)^i}{i!}; \quad (66)$$

事实上, 当 $n=1$, 此等式取如下形式

$$\int_g^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{g},$$

这是无疑的; 假設当 $n=k$ 时 (66) 式成立, 則我們有:

$$\begin{aligned} J_{k+1}(g) &= \int_1^\infty \frac{dx_{k+1}}{x_{k+1}^2} J_k\left(\frac{g}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{g} \int_0^g J_k(u) du \\ &= \frac{1}{g} \left\{ \int_0^1 J_k(u) du + \int_1^g J_k(u) du \right\}. \end{aligned}$$

在第一个积分中用 (65) 式表示 $J_k(u)$, 在第二个积分中用 (66) 式表示它, 当 $n=k$, $g \geq 1$ 时, 我們假設 $J_k(g)$ 的表达式已經建立, 我們得到

$$J_{k+1}(g) = \frac{1}{g} \left[1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\ln g)^{i+1}}{(i+1)!} \right] = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^k \frac{(\ln g)^i}{i!},$$

定理由此得証.

所以,

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \frac{2^n}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ln g)^i}{i!}.$$

其中, 設 $g = e^{An}$, 在此常数 $A > 1$, 我們得到:

$$\mathfrak{M} E_n(e^{An}) < e^{n(\ln 2 - A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(An)^i}{i!}.$$

在所得的和中, 容易看出, 其每一項都小于

$$\frac{(An)^n}{n!};$$

因此, 利用估計阶乘的斯特林(Stirling)公式并在以后設 C_1 与 C_2 是两个正的絕對常数, 我們得到:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} E_n(e^{An}) &< e^{n(\ln 2 - A)} \frac{(An)^n}{n!} < C_1 e^{n(\ln 2 - A)} \frac{n (An)^n}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \\ &< C_2 \sqrt{n} e^{-n(A - \ln A - \ln 2 - 1)}. \end{aligned}$$

可是当 A 充分大, 则

$$A - \ln A - \ln 2 - 1 > 0,$$

所以, $\mathfrak{M} E_n(e^{1/n})$ 小于一个收敛级数的第 n 项. 这样, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_n(e^{1/n})$ 收敛, 所以在区间 $(0, 1)$ 内除去测度为零的集合外, 每个数只属于有限个集合 $E_n(e^{1/n})$; 但这就意味着, 对于区间 $(0, 1)$ 中几乎一切数, 当 n 充分大时, 我们都应当有

$$a_1 a_2 \cdots a_n < e^{1/n},$$

又因为

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} < 2a_n q_{n-1},$$

因此

$$q_n < 2^n a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1,$$

所以几乎处处对充分大的 n 有

$$q_n < 2^n e^{1/n} = e^{2/n},$$

在此设 $B = A + \ln 2$; 定理 31 由此得证.

所得结果具有很特殊的意义, 在目前对我们特别重要, 因为它使我们可对上节提出的近似的测度理论的基本问题给出简单的解.

定理 32 设 $f(x)$ 是正变量 x 的正的连续的函数, 并且 $xf(x)$ 是不增函数. 如果对于某个 $c > 0$, 积分

$$\int_c^{\infty} f(x) dx \quad (67)$$

发散, 则几乎对一切 α , 不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{f(q)}{q} \quad (68)$$

的整数解 (p 和 q 为整数, 又设 $q > 0$) 是无穷集; 反之, 若积分 (67) 收敛, 则不等式 (68) 几乎对一切 α 只有有限个整数解 p 和 q ($q > 0$).

预先指出. 在特殊情况下, 根据定理 32, 不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2 \ln q}$$

几乎处处对 α 都有无穷个整数解, 反之, 不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2 \ln^{1+\varepsilon} q}$$

对任何常量 $\varepsilon > 0$, 几乎处处对 α 只有有限个整数解. 因此, 我們可提出这样的概念的一个范例, 即若略去测度为零的集合, 我們应当将近似的一般規律改进到何种程度.

証明 1) 設积分(67)发散, 令

$$\varphi(x) = e^{Bx} f(e^{Bx}),$$

在此, B 即出现在定理 31 中的常量. 这时积分

$$\int_a^A \varphi(x) dx = \frac{1}{B} \int_{e^{Ba}}^{e^{BA}} f(u) du,$$

这里 $A > a > 0$, 当 $A \rightarrow \infty$, 此积分无限制地增大, 但根据定理的条件, 函数 $\varphi(x)$ 是不增加的, 所以級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$$

发散^①. 根据定理 30 我們由此断言, 几乎对一切数 α , 都有无限个 i 值满足不等式

$$a_{i+1} \geq \frac{1}{\varphi(i)} \quad \textcircled{2},$$

但当此不等式成立时我們就有:

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| \leq \frac{1}{q_i q_{i+1}} \leq \frac{1}{a_{i+1} q_i^2} \leq \frac{\varphi(i)}{q_i^2}. \quad (69)$$

据定理 31 几乎处处对充分大的 i 有

$$q_i < e^{Bi},$$

① $\because \varphi(x)$ 不增, $\therefore \int_1^\infty \varphi(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty \varphi(n)$. ——譯者注

② $\because a_{i+1} \geq \frac{1}{\varphi(i+1)}$, 又 $\varphi(i+1) \leq \varphi(i)$, $\therefore a_{i+1} \geq \frac{1}{\varphi(i+1)} \geq \frac{1}{\varphi(i)}$. ——譯者注

由此,

$$i > \frac{\ln q_i}{B};$$

所以不等式(69)几乎处处对充分大的 i 值都引向不等式

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{q_i^2} \left(\frac{\ln q_i}{B} \right) = \frac{f(q_i)}{q_i};$$

最后这一不等式几乎处处对无穷个 i 值都满足, 定理的第一个断语由此得证.

2) 现在设积分(67)收敛, 因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

也收敛^①. 以 E_n 表示区间 $(0, 1)$ 中满足如下条件的数 α 的集合, 对于适当选定的整数 k , 它满足

$$\left| \alpha - \frac{k}{n} \right| < \frac{f(n)}{n}$$

[显然, 集合 E_n 是分别以点 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ 为中心的, 长度为 $\frac{2f(n)}{n}$ 的区间及区间 $(0, \frac{f(n)}{n})$ 和 $(1 - \frac{f(n)}{n}, 1)$ 的总体^②]. 我們有

$$\mathfrak{M} E_n \leq 2f(n)$$

(符号 $<$ 当 $f(n) > \frac{1}{2}$ 时成立). 因此, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_n$$

收敛; 象我們已經不止一次所作的那样, 我們断定, 区间 $(0, 1)$ 中

① 因为 $\alpha f(x)$ 是不增函数, $\therefore f(x)$ 也是不增函数, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx$.
——譯者注

② 应当改为: 指的是这些区间和 $(0, 1)$ 的公共部分. 因而其长度 $l_k \leq \frac{f(n)}{n}$.
——譯者注

几乎所有的数 α 只属于有限个集合 E_n ; 这就是說, 对于区間 $(0, 1)$ 中几乎一切数 α , 当正整数 q 充分大时, 不論 p 取任何整数值, 不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{f(q)}{q}$$

都成立, 定理的第二断言由此得証.

在下节中我們將認識这样的方法, 利用它可以解决連分数量理論中深刻得多的問題.

§ 15 高斯 (Gauss) 問題和庫茲明 (Кузьмин) 定理

在本节中我們研究这样的問題, 从历史上說來它是連分数量理論的第一个問題. 这个問題高斯已經提出來了, 但直到 1928 年才得到解决^①.

象通常一样, 設

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

$$\tau_n = \tau_n(\alpha) = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots],$$

以 $z_n = z_n(\alpha)$ 表示連分数

$$[0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots],$$

即, 令

$$z_n = \tau_n - a_n.$$

显然, 处处有

$$0 \leq z_n < 1;$$

以 $m_n(x)$ 表示在区間 $(0, 1)$ 內滿足

$$z_n(\alpha) < x$$

① 見于 P. O. 庫茲明的工作“关于一个高斯問題 (Об одной задаче Гаусса)”, 苏联科学院报告, ДАН(A), 1928 年, 350~380 頁. 另外的解法見于 P. Lévy 的文章“Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue”, Bull. Soc. Math. 57, 1929 年, 178~194 頁. — 格溫堅科法

的 α 点集的测度.

高斯在給拉普拉斯(Laplace)的一封信中說, 他已成功地找到了一個定理的証明, 利用这定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \quad (0 \leq x \leq 1);$$

他又指出, 最好是能估計当 n 充分大时, 差数

$$m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \quad (70)$$

是什么阶的微量, 据他說, 这件事他没有完成. 看来, 高斯的証明从未发表过; 此命题的其他証法直到 1928 年以前也还未知有人找到过, 到这一年出现了 P. O. 庫茲明提出的关于高斯的問題的証明; 同时庫茲明也找出了差数(70)的很好的估計. 本节的任务就是叙述庫茲明的这些結果, 以及为我們以后所必需的某些推广^①.

高斯已經知道函数序列

$$m_0(x), m_1(x), m_2(x), \dots, m_n(x), \dots$$

满足函数方程:

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\} \quad (0 \leq x \leq 1, n \geq 0); \quad (71)$$

事实上, 由明显的关系式

$$z_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}}$$

可見, 不等式

$$z_{n+1} < x$$

成立的必要且充分的条件是: 对于适当选择的正整数 k 值, 不等式

$$\frac{1}{k+x} < z_n \leq \frac{1}{k}$$

成立; 又因为满足此不等式的数集的测度显然是

^① 和高斯相似, 庫茲明是用概率論的术语簡明地說出他所得的結果的, 无避地, 这不能改变它的度量性內容. —— 辛欽注

$$m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right),$$

故由此得到关系式(71).

容易直接验证, 函数

$$\varphi(x) = C \ln(1+x)$$

对于任何常数 C 都满足关系式:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\},$$

也许, 它就是高斯所指出的当 $n \rightarrow \infty$ 时函数 $m_n(x)$ 的极限函数的正确表达式.

对方程(71)作形式上的微分, 得

$$m'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} m'_n\left(\frac{1}{k+x}\right); \quad (72)$$

不难证实, 关系式(72)实际上是成立的; 事实上, 因为显然有 $z_0(\alpha) = \alpha$, 所以 $m_0(x) = x$, 因此 $m'_0(x) = 1$; 一般地假设对某个 n , 函数 $m'_n(x)$ 为有界和连续, 则关系式(72)右端的级数在区间 $(0, 1)$ 内一致收敛; 因此这级数之和也有界和连续, 并且按已知的关于级数逐项微分的定理, 此和等于 $m'_{n+1}(x)$. 这样一来, 用归纳法就证明了关系式(72).

方程(72)比方程(71)便于研究多了. 庫茲明的基本結果是与它有关的, 我們現在來敘述此結果的証明.

定理 33 設 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ 是定义在閉区間 $[0, 1]$ 上的实函数序列, 而且在此区間內滿足关系式:

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \quad (n \geq 0). \quad (73)$$

又設当 $0 \leq x \leq 1$ 时

$$0 < f_0(x) < M \text{ 和 } |f'_0(x)| < \mu,$$

則

$$f_n(x) = \frac{a}{1+x} + \theta A e^{-\lambda \sqrt{x}} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

在此

$$a = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 f_0(z) dz, \quad |\theta| < 1,$$

λ 是正的絕對常數, A 是只依賴于 M 和 μ 的正的常數.

由于此証明相当复杂, 我們先叙述一些初等的引理.

引理 1 在定理 33 的条件下, 对于任何 $n \geq 0$,

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{(n)} f_0 \left(\frac{p_j + x p_{n-1}}{q_j + x q_{n-1}} \right) \frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2}, \quad (74)$$

在此 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right)$ 是任何 n 級区間而求和是对一切 n 級区間进行的 (或者说, 按照元素 a_1, a_2, \dots, a_n 在从 1 到 ∞ 的范围内求和).

証明 对于 $n=0$, 关系式 (74) 是明显的, 因为在这种情况下, 只有唯一的区間 $(0, 1)$, 并且 $p_0=0, q_0=1, p_{-1}=1, q_{-1}=0$. 又假设关系式 (74) 对某个 n 成立, 我們据基本方程 (73) 得:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n \left(\frac{1}{k+x} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \sum_{j=1}^{(n)} f_0 \left(\frac{p_j + \frac{1}{k+x} p_{n-1}}{q_j + \frac{1}{k+x} q_{n-1}} \right) \frac{1}{(q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1})^2} \\ &= \sum_{k=1}^{(n)} \sum_{j=1}^{\infty} f_0 \left\{ \frac{(p_n k + p_{n-1}) + x p_n}{(q_n k + q_{n-1}) + x q_n} \right\} \frac{1}{\{(q_n k + q_{n-1}) + x q_n\}^2} \\ &= \sum_{j=1}^{(n+1)} f_0 \left(\frac{p_{n+1} + x p_n}{q_{n+1} + x q_n} \right) \frac{1}{(q_{n+1} + x q_n)^2}, \end{aligned}$$

引理由此得証.

引理 2 在定理 33 的条件下, 对于 $n \geq 0$,

$$|f'_n(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M.$$

証明 逐項微分 (74) 式, 我們得到:

$$f'_n(x) = \sum_{j=1}^{(n)} f'_0(u) \frac{(-1)^n}{(q_n + x q_{n-1})^4} - 2 \sum_{j=1}^{(n)} f_0(u) \frac{q_{n-1}}{(q_n + x q_{n-1})^3},$$

在此令

$$u = \frac{p_n + xq_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}},$$

由此式右端兩級數在 $0 \leq x \leq 1$ 上的一致收斂性，得到逐項微分的合法性。注意到

$$\frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} < \frac{2}{q_n(q_n + q_{n-1})} \quad \textcircled{1},$$

根據第一章定理 12,

$$q_n(q_n + q_{n-1}) > q_n^2 > 2^{n-1},$$

同時考慮到明顯的關係式：

$$\sum_{(n)} \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \sum_{(n)} \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1} + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = 1,$$

我們根據定理 33 的條件得到：

$$|f'_n(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M,$$

引理由此得證 $\textcircled{2}$.

$$\textcircled{1} \quad \because 2(q_n + xq_{n-1})^2 - q_n(q_n + q_{n-1}) = q_n^2 + (4x-1)q_nq_{n-1} + x^2q_{n-1}^2 \\ \geq q_n^2 - q_nq_{n-1} > 0, \quad \text{——譯者注}$$

$$\textcircled{2} \quad \because \left| \sum_{(n)} f'_0(u) \frac{(-1)^n}{(q_n + xq_{n-1})^2} \right| \leq \sum_{(n)} |f'_0(u)| \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} \\ \leq \max |f'_0(u)| \cdot \max \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} \cdot \sum_{(n)} \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2},$$

$$\text{又} \quad \because (q_n + xq_{n-1})^2 \geq q_n^2 > 2^{n-1} > 2^{n-2},$$

$$\therefore \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} < \frac{1}{2^{n-2}},$$

$$\therefore \text{上式} < \frac{\mu}{2^{n-2}} \cdot \sum_{(n)} \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} < \frac{\mu}{2^{n-2}} \sum_{(n)} \frac{2}{q_n(q_n + q_{n-1})} \\ = \frac{2\mu}{2^{n-2}} \sum_{(n)} \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1} + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{\mu}{2^{n-3}}.$$

$$\text{其次, } \left| 2 \sum_{(n)} f_0(u) \frac{q_{n-1}}{(q_n + xq_{n-1})^3} \right| \leq 2 \max |f_0(u)| \max \frac{q_{n-1}}{(q_n + xq_{n-1})^3} \sum_{(n)} \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} \\ < 2M \left(\frac{q_{n-1}}{q_n} \right) \sum_{(n)} \frac{2}{(q_n + q_{n-1})q_n} \\ < 2M \sum_{(n)} \frac{2}{q_n(q_n + q_{n-1})} = 4M,$$

$$\therefore |f'_n(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M. \quad \text{——譯者注}$$

引理 3 假設

$$\frac{t}{1+x} < f_n(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

則

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

證明 在此引理的条件下, 基本关系式(73)指出:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{1 + \frac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2} < f_{n+1}(x) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{1 + \frac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2}$$

或

$$t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} < f_{n+1}(x) < T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)},$$

也就是

$$t \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) < f_{n+1}(x) < T \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right),$$

最后得,

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x},$$

引理由此得証.

引理 4

$$\int_0^1 f_n(z) dz - \int_0^1 f_0(z) dz \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

證明 根据基本关系式(73), 当 $n > 0$ 时

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(z) dz &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_{n-1} \left(\frac{1}{k+z} \right) \frac{dz}{(k+z)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_{n-1}(u) du = \int_0^1 f_{n-1}(u) du, \end{aligned}$$

因此, 用归纳法就可証明引理 4.

定理 33 的証明. 根据条件, 函数 $f_0(x)$ 可微, 这說明当 $0 \leq x$

≤ 1 时它連續; 如果它在此區間上还是正的, 則它有一个正的最小值, 我們以 m 表示此值; 从条件 $m < f_0(x) < M$ ($0 \leq x \leq 1$) 得到

$$\frac{m}{2(1+x)} < f_0(x) < \frac{2M}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

或

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

在此設

$$g = \frac{m}{2}, \quad G = 2M.$$

現在令

$$f_n(x) - \frac{g}{1+x} = \varphi_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1; n = 0, 1, 2, \dots).$$

由引理 3 的証明过程可見, 函数 $F(x) = \frac{g}{1+x}$ 滿足方程

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{k+x}\right) \frac{1}{(k+x)^2}$$

(这也容易直接驗證); 由此显然可得, 函数序列

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

滿足方程 (73), 所以对此序列而言, 我們由方程 (73) 作出的一切結論都成立, 特別是关系式 (74). 因此, 为簡便起見, 和过去一样, 令

$$u = \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}},$$

我們就有

$$\varphi_n(x) = \sum_{(n)} \varphi_0(u) \frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2},$$

根据明显的不等式

$$q_n + x q_{n-1} \leq q_n + q_{n-1} < 2q_n \quad \text{和} \quad \varphi_0(u) > 0$$

我們得到:

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2} \sum_{(n)} \varphi_0(u) \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}. \quad (75)$$

从另一方面来看, 中值定理告訴我們:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z) dz = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{(G)} \varphi_0(u') \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}, \quad (76)$$

在此, u' 是区間 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ 内的一点, 而 $\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}$ 是此区間的长度. 关系式(75)和(76)告訴我們:

$$\varphi_n(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z) dz > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{(G)} \{\varphi_0(u) - \varphi_0(u')\} \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}. \quad (77)$$

又因为显然有

$$|\varphi'_0(x)| \leq |f'_0(x)| + g < \mu + g \quad (0 \leq x \leq 1),$$

所以

$$\begin{aligned} |\varphi_0(u) - \varphi_0(u')| &< (\mu + g) |u - u'| \\ &< \frac{\mu + g}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{\mu + g}{q_n^2} < \frac{\mu + g}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

由不等式(77)得:

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z) dz - \frac{\mu + g}{2^n} = l - \frac{\mu + g}{2^n},$$

在此令

$$l = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z) dz.$$

这样, 我們得到:

$$f_n(x) > \frac{g}{1+x} + l - \frac{\mu + g}{2^n} > \frac{g + l - 2^{-n+1}(\mu + g)}{1+x} = \frac{g_1}{1+x}.$$

完全类似地, 在研究中引入函数序列

$$\psi_n(x) = \frac{G}{1+x} - f_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

并作类似的討論, 我們得到不等式:

$$f_n(x) < \frac{G - l' + 2^{-n+1}(\mu + G)}{1+x} = \frac{G_1}{1+x},$$

在此令

$$l' = \frac{1}{2} \int_0^1 \psi_0(z) dz,$$

因为 $l > 0$ 和 $l' > 0$, 所以对于充分大的 n , 有

$$g < g_1 < G_1 < G$$

和

$$G_1 - g_1 < G - g - (l + l') + 2^{-n+2}(\mu + G);$$

又因为

$$l + l' = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{G - g}{1 + z} dz = (G - g) \frac{\ln 2}{2},$$

所以

$$G_1 - g_1 < (G - g)\delta + 2^{-n+2}(\mu + G),$$

在此

$$\delta = 1 - \frac{\ln 2}{2} < 1,$$

它是一个正的绝对常数.

现在概括一下我们得到的结果. 从条件

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x}, \quad |f'_0(x)| < \mu$$

我们得到

$$\frac{g_1}{1+x} < f_n(x) < \frac{G_1}{1+x},$$

且当 n 充分大时, 还有

$$g < g_1 < G_1 < G \text{ 和 } G_1 - g_1 < (G - g)\delta + 2^{-n+2}(\mu + G) \textcircled{1}.$$

现在取函数 $f_n(x)$ 代替 $f_0(x)$ 作为初始函数, 重复已进行过的讨论过程, 显然我们得到关系式:

$$\frac{g_2}{1+x} < f_{2n}(x) < \frac{G_2}{1+x},$$

① 我们将原文略加修改. 原文为: 当 n 充分大时, 有

$\frac{g_1}{1+x} < f_n(x) < \frac{G_1}{1+x}$, 此处 $g < g_1 < G_1 < G$ 和 $G_1 - g_1 < (G - g)\delta + 2^{-n+2}(\mu + G)$.

并且

$$g_1 < g_2 < G_2 < G_1, \\ G_2 - g_2 < (G_1 - g_1)\delta + 2^{-n+2}(\mu_1 + G_1),$$

在此 μ_1 是一个正数, 满足

$$|f'_1(x)| < \mu_1 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

繼續此过程, 我們得到一般的关系式:

$$\frac{g_r}{1+x} < f_r(x) < \frac{G_r}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1; r=0, 1, 2, \dots),$$

而且当 $r > 0$ 时

$$g_{r-1} < g_r < G_r < G_{r-1}, \\ G_r - g_r < \delta(G_{r-1} - g_{r-1}) + 2^{-n+2}(\mu_{r-1} + G_{r-1}), \quad (78)$$

在此, μ_{r-1} 是使不等式

$$|f'_{(r-1)n}(x)| < \mu_{r-1} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

成立的一个正数. 由引理 2, 我們可設

$$\mu_r = \frac{\mu}{2^{rn-3}} + 4M \quad (r=0, 1, 2, \dots),$$

因此当 n 选得充分大时, 有

$$\mu_r < 5M \quad (r=1, 2, \dots);$$

对 $r=1, 2, \dots, n$ 連續地运用不等式 (78) 我們得到

$$G_n - g_n < (G - g)\delta^n + 2^{-n+2}\{(\mu + 2M)\delta^{n-1} \\ + 7M\delta^{n-2} + 7M\delta^{n-3} + \dots + 7M\delta + 7M\}.$$

因为 $\delta < 1$ 是一个绝对常数, 显然, 由此得到:

$$G_n - g_n < Be^{-\lambda n},$$

在此 $\lambda > 0$ 是一个绝对常数, 而 $B > 0$ 只依赖于 M 和 μ .

由此首先可以断定, 存在着公共的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \alpha$$

而且

① 实际上, 要得到此結論, 須作較繁的討論, 建議讀者自己作証明. ——譯者注

$$\left| f_n(x) - \frac{a}{1+x} \right| < B e^{-\lambda n} \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (79)$$

因此,特别是

$$\int_0^1 f_n(z) dz \rightarrow a \ln 2 \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以,根据引理 4

$$a = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 f_0(z) dz.$$

最后,設 $n^2 \leq N < (n+1)^2$; 因为根据不等式(79)

$$\frac{a - 2B e^{-\lambda n}}{1+x} < f_n(x) < \frac{a + 2B e^{-\lambda n}}{1+x},$$

则由引理 3 得

$$\frac{a - 2B e^{-\lambda n}}{1+x} < f_N(x) < \frac{a + 2B e^{-\lambda n}}{1+x}$$

或

$$\left| f_N(x) - \frac{a}{1+x} \right| < 2B e^{-\lambda n} = A e^{-\lambda(n+1)} < A e^{-\lambda \sqrt{N}},$$

在此令 $A = 2B e^{\lambda}$. 我們对充分大的 N 所建立的这一不等式,显然,若适当增加常数 A , 則它对一切 $N \geq 0$ 也成立, 定理 33 由此完全得証.

現在来研究高斯問題并令

$$f_n(x) = m'_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

我們有 $f_0(x) \equiv 1$, 因此定理 33 的条件都滿足. 这样,我們得到:

$$\left| m'_n(x) - \frac{1}{(1+x) \ln 2} \right| < A e^{-\lambda \sqrt{n}} \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (80)$$

因此用积分法可得:

$$\left| m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \right| < A e^{-\lambda \sqrt{n}} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

在此 A 和 λ 是正的绝对常数. 显然, 此式不仅証明了高斯的判断, 而且得到了对余项的良好估計^①.

① 用 P. Lévy 的方法可得到更好的估計, 即可証明如下的不等式

$$\left| m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \right| < A e^{-\lambda n} \quad (0 \leq x \leq 1). \quad \text{——格涅曼科注}$$

現在应用此結果來估計這樣的點集的測度，它的點滿足 $a_n = k$ ， n 是一個很大的數。因為顯然條件 $a_n = k$ 等价於不等式

$$\frac{1}{k+1} < z_{n-1} \leq \frac{1}{k},$$

所以

$$\mathfrak{M}E\left(\frac{n}{k}\right) = m_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - m_{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} m'_{n-1}(x) dx,$$

由此，据不等式(80)得

$$\left| \mathfrak{M}E\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\ln 2} \right| < \frac{1}{k(k+1)} e^{-\lambda\sqrt{n-1}}; \quad (81)$$

从这里看来，特别是对数量 $\mathfrak{M}E\left(\frac{n}{k}\right)$ ，我們在 § 12 中已建立的不等式是十分粗糙的，現在我們得到精确的极限关系式：

$$\mathfrak{M}E\left(\frac{n}{k}\right) \rightarrow \frac{\ln\left\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\ln 2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

例如，满足 $a_n = 1$ 的點集，当 $n \rightarrow \infty$ 时它的測度趋向數

$$\frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 2}.$$

但是定理 33 除了可用來証明高斯的論断外，还可以由它得到為我們今后所需要的更普遍又极重要的結果。以 $M_n(x)$ 表示這樣的數集的測度，它的每個數属于某个固定的 k 級區間，此外，还滿足条件 $z_{k+n} < x$ ；換言之， $M_n(x)$ 是區間 $(0, 1)$ 內滿足条件

$$a_1 = r_1, a_2 = r_2, \dots, a_k = r_k; z_{k+n} < x \quad (82)$$

的數集的測度，在此 r_1, r_2, \dots, r_k 是某些固定的自然數， $n \geq 0$ ， $x (0 \leq x \leq 1)$ 可隨意改變。

显然，為了滿足条件(82)，其必要且充分的条件是滿足：

$$a_1 = r_1, a_2 = r_2, \dots, a_k = r_k; \quad \frac{1}{r+x} < z_{k+n-1} \leq \frac{1}{r},$$

在此 r 是某个自然数, 由此得到:

$$M_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ M_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right) - M_{n-1}\left(\frac{1}{r+x}\right) \right\} \quad (n \geq 1, 0 \leq x \leq 1),$$

因此函数序列 $M'_0(x)$, $M'_1(x)$, \dots , $M'_n(x)$, \dots 满足方程(73).

区間 $\left(\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}\right)$ 中的任何数 α 可表成如下形式

$$\alpha = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}},$$

或因为

$$z_k = \frac{1}{r_{k+1}},$$

所以

$$\alpha = \frac{p_k + z_k p_{k-1}}{q_k + z_k q_{k-1}};$$

当 $z_k < x$, 数 α 应当包含在 $\frac{p_k}{q_k}$ 及 $\frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}}$ 之間, 因此

$$M_n(x) = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}} \right| = \frac{x}{q_k (q_k + q_{k-1} x)}. \quad (83)$$

現在設

$$M_n(x) = \mathfrak{M}E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k \\ r_1, r_2, \dots, r_k \end{matrix} \right) \chi_n(x) \quad (n \geq 0, 0 \leq x \leq 1),$$

我們得到新的函数序列:

$$\chi_0(x), \chi_1(x), \dots, \chi_n(x), \dots;$$

这时, 显然函数 $\chi'_n(x)$ 与对应的函数 $M'_n(x)$ 只差一个常数因子, 所以它也满足方程(73). 因为

$$\mathfrak{M}E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k \\ r_1, r_2, \dots, r_k \end{matrix} \right) = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right| = \frac{1}{q_k (q_k + q_{k-1})},$$

所以等式(83)告訴我們

$$\chi_0(x) = \frac{(q_k + q_{k-1})x}{q_k + q_{k-1}x},$$

由此得

$$\chi'_0(x) = \frac{q_k(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}x)^2}$$

和

$$\chi''_0(x) = -\frac{2q_k q_{k-1}(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}x)^3};$$

这样,

$$\frac{1}{2} < \chi'_0(x) < 2, \quad |\chi''_0(x)| < 4 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

这就说明, 对于函数 $\chi'_n(x)$ 的序列, 可以应用定理 33, 并且 A 和 λ 是绝对常数, 它们也不依赖于 r_1, r_2, \dots, r_k . 这样, 我們得到

$$\chi'_n(x) = \frac{M'_n(x)}{\Re E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k \\ r_1, r_2, \dots, r_k \end{matrix} \right)} = \frac{1}{(1+x) \ln 2} + \theta A e^{-\lambda \sqrt{n}},$$

$$|\theta| < 1;$$

在区间 $\left[\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r} \right]$ 上对此关系式进行积分, 在此 r 为任何自然数, 我們得

$$\frac{M_n \left(\frac{1}{r} \right) - M_n \left(\frac{1}{r+1} \right)}{\Re E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k \\ r_1, r_2, \dots, r_k \end{matrix} \right)} = -\frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} + \frac{\theta' A}{r(r+1)} e^{-\lambda \sqrt{n}},$$

其中 $|\theta'| < 1$, 而因为

$$M_n \left(\frac{1}{r} \right) - M_n \left(\frac{1}{r+1} \right) = \Re E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k, k+n+1 \\ r_1, r_2, \dots, r_k, r \end{matrix} \right),$$

所以

$$\Re E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k, k+n+1 \\ r_1, r_2, \dots, r_k, r \end{matrix} \right) = \left(-\frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} + \frac{\theta' A}{r(r+1)} e^{-\lambda \sqrt{n}} \right) \cdot \Re E \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, k \\ r_1, r_2, \dots, r_k \end{matrix} \right).$$

最后, 我們可将此关系式按变数 r_1, r_2, \dots, r_k 所能取的一切值 (从

1 到 ∞) 求和。在此求和的結果中, 关系式兩端的对应指标自然消失, 所以代替按自然順序的指标序列 $1, 2, \dots, k$ 我們得到完全任意的指标列 n_1, n_2, \dots, n_t , 并且上述关系式对于保留下来的記号保持不变。因此, 我們得到下面的命題。

定理 34 存在这样两个正的对数常数 A 和 λ , 对于 $n_1 < n_2 < \dots < n_t < n_{t+1}$ 和任意正整数 r_1, r_2, \dots, r_t, r

$$\left| \frac{ME \left(\begin{matrix} n_1, n_2, \dots, n_t, n_{t+1} \\ r_1, r_2, \dots, r_t, r \end{matrix} \right)}{ME \left(\begin{matrix} n_1, n_2, \dots, n_t \\ r_1, r_2, \dots, r_t \end{matrix} \right)} - \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} \right| < \frac{A}{r(r+1)} e^{-\lambda \sqrt{n_{t+1} - n_t - 1}}.$$

此結果指出, 不仅是区間 $(0, 1)$ 內滿足 $a_n = r$ 的数集的測度当 $n \rightarrow \infty$ 时趋向确定的極限; 而且对于这样的数集, 在 a_n 前的元素中有某一組取任意固定的值, 又 $a_n = r$, 此数集的測度也趋向同一極限。

§ 16 平均值^①

以上各节的結果使我們有了可能来証明下面的更一般的命題。

定理 35 設 $f(r)$ 是自然数变量 r 的非負函数, 又設存在这样的正的常数 C 和 δ , 使

$$f(r) < Cr^{\frac{1}{2}-\delta} \quad (r = 1, 2, \dots).$$

这时, 对于区間 $(0, 1)$ 內一切数 (至多有一个測度为零的集合是例外), 下式成立,

^① 本节的結果可在“Compositia Mathematica”第一卷上辛欽的文章“Metrische Kettenbruchprobleme”中找到 (1935 年, 361~382 頁)。——格涅堅科注

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} \quad (84)$$

預先指出，等式(84)右端的級數的收斂性，可由函數 $f(r)$ 的條件得到。

證明 設：

$$\int_0^1 f(a_k) d\alpha \cdot u_k, \quad \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2 d\alpha = b_k,$$

$$\int_0^1 \{f(a_i) - u_i\} \{f(a_k) - u_k\} d\alpha = g_{ik},$$

$$\sum_{k=1}^n \{f(a_k) - u_k\} = s_n - s_n(\alpha).$$

由所設函數 $f(r)$ 的性質容易斷言所有上述積分都存在。事實上，因為

$$\{f(r)\}^2 < C^2 r^{1-2\delta},$$

所以

$$\int_0^1 \{f(a_k)\}^2 d\alpha = \sum_{r=1}^{\infty} \{f(r)\}^2 \mathfrak{M} E \left(\frac{k}{r} \right) < 2C^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{1-2\delta}}{r^2} = C_1,$$

即積分 $\int_0^1 \{f(a_k)\}^2 d\alpha$ 有意義，由此按照布雅可夫斯基 (Буняков-ский)-希瓦爾茲 (Schwartz) 不等式容易證明一切上述積分的存在。特別是，由此可得

$$\left. \begin{aligned} b_k &= \int_0^1 \{f(a_k)\}^2 d\alpha - u_k^2 < C_1, \\ u_k &= \int_0^1 f(a_k) d\alpha \cdot \sqrt{\int_0^1 \{f(a_k)\}^2 d\alpha} < \sqrt{C_1}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

其次，當 $k > i$ ，我們顯然有

$$\begin{aligned} g_{ik} &= \int_0^1 f(a_i) f(a_k) d\alpha - u_i u_k \\ &= \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s) \mathfrak{M} E \left(\frac{i, k}{r, s} \right) - u_i u_k. \end{aligned} \quad (86)$$

① (84)式左端的含義是：對每一個數 a ，取它的元素 a_1, a_2, \dots, a_n ，再作出 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k)$ 。——譯者注

但是根据定理 34 和 § 12 中的不等式, 有

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i, k \\ r, s \end{matrix} \right) - \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{s(s+2)} \right\}}{\ln 2} \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right) \right| \\ & < \frac{A \cdot e^{-\lambda \sqrt{k-i-1}}}{s(s+1)} \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right) \\ & < 3Ae^{-\lambda \sqrt{k-i-1}} \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right), \quad (87) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right) - \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{s(s+2)} \right\}}{\ln 2} \right| \\ & < \frac{Ae^{-\lambda \sqrt{k-1}}}{s(s+1)} < 3Ae^{-\lambda \sqrt{k-1}} \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right). \quad (88) \end{aligned}$$

将不等式(88)乘以 $\mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right)$ 并且将所得结果与不等式(87)对比, 我們得到:

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i, k \\ r, s \end{matrix} \right) - \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right) \right| \\ & < 6Ae^{-\lambda \sqrt{k-i-1}} \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right), \end{aligned}$$

因此关系式(86)告訴我們:

$$\begin{aligned} & \left| g_{ik} - \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)f(s) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right) + u_i u_k \right| \\ & < 6Ae^{-\lambda \sqrt{k-i-1}} \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)f(s) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right); \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)f(s) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} i \\ r \end{matrix} \right) \mathfrak{M} E \left(\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right) = u_i u_k$$

同时利用不等式(85)之第二式来估計右端, 我們由此得到:

$$|g_{ik}| < 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}u_iu_k < 6AC_1e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}. \quad (89)$$

利用估計式(85)和(89),我們得到,当 $n > m > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (s_n - s_m)^2 d\alpha &= \int_0^1 \left\{ \sum_{k=m+1}^n [f(a_k) - u_k] \right\}^2 d\alpha \\ &= \sum_{k=m+1}^n \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2 d\alpha \\ &\quad + 2 \sum_{i=m+1}^n \sum_{k=i+1}^n \int_0^1 \{f(a_i) - u_i\} \{f(a_k) - u_k\} d\alpha \\ &= \sum_{k=m+1}^n b_k + 2 \sum_{i=m+1}^n \sum_{k=i+1}^n g_{ik} < C_1(n-m) \\ &\quad + 12AC_1 \sum_{i=m+1}^n \sum_{k=i+1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} < C_2(n-m), \quad (90) \end{aligned}$$

在此 C_2 是某个新的正常数.

現在以 e_n 表示区間 $(0, 1)$ 中这样的数集, 对于它

$$|s_n| \geq \varepsilon n,$$

在此 ε 是任意給定的正常数. 显然,

$$\int_0^1 s_n^2 d\alpha \geq \int_{e_n} s_n^2 d\alpha \geq \varepsilon^2 n^2 \mathfrak{M}e_n,$$

由不等式(90)(当 $m=0$)可得:

$$\mathfrak{M}e_n \leq \frac{\int_0^1 s_n^2 d\alpha}{\varepsilon^2 n^2} < \frac{C_2}{\varepsilon^2 n}.$$

这样,級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}e_n$$

收敛, 因此, 正如我們所知, 区間 $(0, 1)$ 中几乎一切数都属于有限个集合 e_n ($n=1, 2, 3, \dots$). 这就意味着, 对于区間 $(0, 1)$ 内几乎一切数, 当 n 充分大时, 有

$$\frac{|s_n|}{n^2} < \varepsilon;$$

因为 ε 可任意小, 所以几乎处处有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} = 0, \quad (91)$$

此外, 当 $n^2 \leq N < (n+1)^2$ 时公式 (90) 給出:

$$\int_0^1 (s_N - s_n) d\alpha < C_2(N - n^2) < C_2(2n+1) \leq 3C_2n,$$

以 $e_{n,N}$ 表示区間 $(0, 1)$ 内这样的数集, 这些数使 $|s_N - s_n| \geq \varepsilon n^2$, 又設

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} e_{n,N} = E_n,$$

因此当 $n^2 \leq N < (n+1)^2$ 时我們将有:

$$\int_0^1 (s_N - s_n)^2 d\alpha \geq \int_{e_{n,N}} (s_N - s_n)^2 d\alpha \geq \varepsilon^2 n^4 \mathfrak{M} e_{n,N},$$

$$\therefore \mathfrak{M} e_{n,N} \leq \frac{3C_2}{\varepsilon^2 n^3},$$

$$\mathfrak{M} E_n \leq \sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} \mathfrak{M} e_{n,N} \leq \frac{3C_2(2n+1)}{\varepsilon^2 n^3} \leq \frac{9C_2}{\varepsilon^2 n^2},$$

所以級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_n$ 收斂. 因此, 如我們所知, 区間 $(0, 1)$ 内几乎一切数只属于有限个集合 E_n , 也就是說, 它們只属于有限个集合 $e_{n,N}$. 但这就意味着, 区間 $(0, 1)$ 内几乎一切数当 n 充分大且 $n^2 \leq N < (n+1)^2$ 时都滿足关系式:

$$|s_N - s_n| < \varepsilon n^2.$$

換句話說, 几乎处处对于充分大的 n 和 $n^2 \leq N < (n+1)^2$ 都有

$$\frac{|s_N - s_n|}{n^2} < \varepsilon;$$

又因为 ε 可任意小, 所以几乎处处有

$$\frac{s_N}{n^2} - \frac{s_n}{n^2} \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty, n^2 \leq N < (n+1)^2].$$

由此再根据关系式 (91), 显然可得, 几乎处处有

$$\frac{s_N}{n^2} \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty, n^2 \leq N < (n+1)^2],$$

由此可見下式成立

$$\frac{s_N}{N} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

換句話說, 几乎处处有

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(a_k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty), \quad (92)$$

但根据前一节的公式(81)

$$\left| u_k - \sum_{r=1}^{\infty} f(r) - \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} \right| \leq \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \left| \Re E \left(\frac{k}{r} \right) - \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} \right| \leq A_1 e^{-\lambda \sqrt{k}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{r(r+1)} < A_2 e^{-\lambda \sqrt{k}},$$

在此 A_1 是一个新的正常数, 因此

$$u_k \rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} f(r) - \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} \quad (k \rightarrow \infty),$$

所以

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k \rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} f(r) - \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} \quad (N \rightarrow \infty) \textcircled{1}.$$

从关系式(92)可得:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(a_k) \rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} f(r) - \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2}$$

在区间(0, 1)内几乎处处成立, 定理 35 由此得证.

从已经证明了的定理可以建立连分数的一系列性质(对几乎一切无理数成立的). 例如, 设

① 这是根据数学分析中的一条定理: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$,

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = A,$$

詳細的叙述可参看非赫金哥尔茨: “微积分教程”, 北京高等教育出版社, 1956, 第一卷第一章第二节. ——譯者注

$f(r)=1$ 当 $r=k$ 和 $f(r)=0$ 当 $r \neq k$,

这里 k 是某个(任意的)自然数. 显然, 这时总和

$$\psi_n(k) = \sum_{i=1}^n f(a_i)$$

乃是这样的数, 它表示在所給連分数前 n 个元素中遇到数 k 的次数. 而比例式

$$\frac{\psi_n(k)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i)$$

告訴我們在所給連分数前 n 个元素中数 k 的濃度; 最后, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n(k)}{n} = d(k)$$

如果存在, 自然可以把它解釋为所給連分数全部元素数列中数 k 的濃度.

因为我們所定义的函数 $f(r)$ 显然满足定理 35 的全部要求, 所以根据定理 35 我們断言, 对于任何 k 此密度几乎处处存在, 而且几乎处处相同. 不仅如此, 此定理还給出計算这密度数量的可能; 显然, 我們几乎处处有:

$$d(1) = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 2}, \quad d(2) = \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 2}, \quad d(3) = \frac{\ln 16 - \ln 15}{\ln 2},$$

等等. 这就是說, 任何一个自然数, 它作为元素出現的次数的平均值, 在几乎一切数的展开式中都相同.

我們还得到另一个有趣的結果, 設

$$f(r) = \ln r \quad (r=1, 2, 3, \dots);$$

显然, 定理 35 的全部条件都滿足; 因此我們得到, 几乎处处

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i \rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} \ln(r) \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}}{\ln 2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

或

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \rightarrow \prod_{r=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}^{\frac{\ln r}{\ln 2}}.$$

这样, 前 n 个元素的几何平均值几乎处处当 $n \rightarrow \infty$ 时趋向绝对常数

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{r(r+2)} \right\}^{\frac{\ln r}{\ln 2}} = 2, 6 \dots$$

显然, 定理 35 还可以对其他的平均值序列建立类似的结果。但是当涉及算术平均值

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (93)$$

时, 就不可能用此方法来研究了, 因为对应的函数 $f(r) = r$ 不满足定理 35 的条件。但是从较简单的考虑中容易看出, 表达式 (93) 几乎处处不可能存在有限的极限。事实上, 根据定理 30 (§13) 几乎处处对于无穷个 n 值我们有

$$a_n \geq n \ln n,$$

这就意味着, 更应有

$$\sum_{i=1}^n a_i > n \ln n, \text{ 因此 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i > \ln n.$$

这样, (93) 所表示的量几乎处处无界, 因此, 正如我们已经料到的那样, 它不可能有有限的极限。